Teorema da Divergência e Teorema de Stokes (Resolução Sumária)

19 de Maio de 2009

1. Calcule o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,-2z)$ para fora da superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + 2z^2,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

   (a) Pela definição.
   Resolução: Uma parametrização de S é por exemplo $\mathbf{g} :]0,2\pi[\times]0,1[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta,z) = \left(\sqrt{1+2z^2}\cos\theta, \sqrt{1+2z^2}\operatorname{sen}\theta, z\right),$$

   uma vez que em coordenadas cilíndricas a equação que define S se escreve $r^2 = 1+2z^2$. Uma vez que

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\sqrt{1+2z^2}\operatorname{sen}\theta & \sqrt{1+2z^2}\cos\theta & 0 \\ 2z(1+2z^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\theta & 2z(1+2z^2)^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\theta & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \left(\sqrt{1+2z^2}\cos\theta, \sqrt{1+2z^2}\operatorname{sen}\theta, -2z\right)$$

   aponta para fora de S, concluímos que $\mathbf{g}$ induz a orientação correspondente à normal exterior unitária, e que portanto o fluxo de $\mathbf{F}$ para fora de S pode ser calculado a partir de

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dV_2 =$$
$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1+2z^2}\cos\theta, \sqrt{1+2z^2}\operatorname{sen}\theta, -2z\right)\cdot\left(\sqrt{1+2z^2}\cos\theta, \sqrt{1+2z^2}\operatorname{sen}\theta, -2z\right) d\theta dz$$
$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} (1+2z^2+4z^2) d\theta dz = 6\pi.$$

   (b) Usando o Teorema da Divergência.
   Resolução: É fácil ver que $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$. A superfície S é um pedaço de um hiperbolóide cujo eixo é o eixo dos zz, e o seu bordo é constituído por uma circunferência C_1 de raio 1 contida no plano $z=0$ e uma circunferência C_2 de raio $\sqrt{3}$ contida no plano $z=1$. Para aplicar o Teorema da Divergência (que só pode ser aplicado a superfícies

que limitam volumes), adicionamos a S os dois círculos D_1 e D_2 contidos nos planos $z = 0$ e $z = 1$ e cujos bordos são C_1 e C_2. A normal unitária indicada corresponde então à normal unitária exterior $\mathbf{n}$ ao volume V limitado por $D_1 \cup S \cup D_2$. Note-se que, em D_1, $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ e, em D_2, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Por outro lado, $\mathbf{F}(x, y, 0) = (x, y, 0)$ e $\mathbf{F}(x, y, 1) = (x, y, -2)$. Pelo Teorema da Divergência tem-se então

$$\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 + \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 + \int_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_3 = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 &= -\int_{D_1} 0 dV_2 - \int_{D_2} (-2) dV_2 \\ &= 2V_2(D_2). \end{aligned}$$

Como D_2 é um círculo de raio $\sqrt{3}$, $V_2(D_2) = 3\pi$, e portanto

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = 6\pi,$$

em conformidade com o nosso cálculo anterior.

(c) Usando o Teorema de Stokes para campos vectoriais.

Resolução: Note-se que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Como $\mathbf{F}$ está definido em $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, concluímos que $\mathbf{F}$ é um campo rotacional. Se $\mathbf{A}$ é um potencial vector para $\mathbf{F}$ então devemos ter

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = x \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -2z \end{cases}$$

Como é sabido, o facto de o potencial vector estar definido a menos de um gradiente permite-nos sempre assumir que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo $A_3 = 0$. Então obtém-se

$$\begin{cases} -\frac{\partial A_2}{\partial z} = x \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} = y \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2 = -xz + f(x, y) \\ A_1 = yz + g(x, y) \\ -z + \frac{\partial f}{\partial x} - z - \frac{\partial g}{\partial y} = -2z \end{cases}$$

Portanto podemos por exemplo escolher $f = g = 0$, e um potencial vector para $\mathbf{F}$ é então

$$\mathbf{A} = (yz, -xz, 0).$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} + \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g}$$

onde as orientações de C_1 e C_2 devem ser compatíveis com a normal unitária $\mathbf{n}$. Mais precisamente, C_1 deve ser percorrida no sentido directo quando vista do semieixo positivo dos zz, e C_2 no sentido inverso. Uma parametrização para C_1 é $\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, e portanto

$$\oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} = \int_0^{2\pi} (0,0,0) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\, d\theta = 0.$$

Uma parametrização para C_2 é $\mathbf{g}(\theta) = \left(\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, 1\right)$; o sentido de C_2 correspondente a esta parametrização é no entanto o contrário àquele que pretendemos, pelo que

$$\oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} = -\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, -\sqrt{3}\cos\theta, 0\right) \cdot \left(-\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta, \sqrt{3}\cos\theta, 0\right)\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} 3d\theta = 6\pi.$$

Portanto mais uma vez concluímos que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = 6\pi.$$

2. Considere a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2} - 1,\ 0 < z < 1\right\}.$$

(a) Calcule o fluxo de $\mathbf{F}(x,y,z) = (x + \cos(yz), y + e^{x^2+z^2}, z+1)$ através da superfície S, no sentido da normal unitária cuja terceira componente é negativa.

Resolução: Apesar do campo $\mathbf{F}$ ser algo complicado, é fácil ver que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$. Portanto será conveniente usar o Teorema da Divergência. A superfície S é um pedaço de um cone cujo eixo é o eixo dos zz, e o seu bordo é constituído por uma circunferência C_1 de raio 1 contida no plano $z = 0$ e uma circunferência C_2 de raio 2 contida no plano $z = 1$. Para aplicar o Teorema da Divergência (que só pode ser aplicado a superfícies que limitam volumes), adicionamos a S os dois círculos D_1 e D_2 contidos nos planos $z = 0$ e $z = 1$ e cujos bordos são C_1 e C_2. A normal unitária indicada corresponde então à normal unitária exterior $\mathbf{n}$ ao volume V limitado por $D_1 \cup S \cup D_2$. Note-se que, em D_1, $\mathbf{n} = (0,0,-1)$ e, em D_2, $\mathbf{n} = (0,0,1)$. Por outro lado, $\mathbf{F}(x,y,0) = (x+1, y+e^{x^2}, 1)$ e $\mathbf{F}(x,y,1) = (x + \cos y, y + e^{x^2+1}, 2)$. Pelo Teorema da Divergência tem-se então

$$\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 + \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 + \int_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV_3,$$

ou seja,

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_V 3dV_3 - \int_{D_1} (-1) dV_2 - \int_{D_2} 2dV_2$$
$$= 3V_3(V) + V_2(D_1) - 2V_2(D_2).$$

Como D_1 e D_2 são círculos de raios 1 e 2, $V_2(D_1) = \pi$ e $V_2(D_2) = 4\pi$. Por outro lado,

$$V_3(V) = \int_0^1 \int_0^{z+1} \int_0^{2\pi} r d\theta dr dz = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{z+1} dz = \frac{7\pi}{3}.$$

Logo,

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = 3 \cdot \frac{7\pi}{3} + \pi - 2 \cdot 4\pi = 0.$$

(b) Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo vectorial $\mathbf{G}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ através de S, no sentido da normal unitária cuja terceira componente é negativa.

Resolução: Note-se que $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$. Como $\mathbf{G}$ está definido em $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, concluímos que $\mathbf{G}$ é um campo rotacional. Se $\mathbf{A}$ é um potencial vector para $\mathbf{G}$, i.e., se $\mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{A}$, então devemos ter

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = y + z \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = x + z \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = x + y \end{cases}$$

Como é sabido, o facto de o potencial vector estar definido a menos de um gradiente permite-nos sempre assumir que uma das componentes deste se anula. Escolhemos por exemplo $A_2 = 0$. Então obtém-se

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} = y + z \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = x + z \\ \frac{\partial A_1}{\partial y} = -x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_3 = \frac{y^2}{2} + zy + f(x, z) \\ \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x} = x + z \\ A_1 = -xy - \frac{y^2}{2} + g(x, z) \end{cases}$$

Portanto podemos por exemplo escolher $f(x, z) = 0$ e $g(x, z) = xz + \frac{z^2}{2}$. Um potencial vector para $\mathbf{G}$ é então

$$\mathbf{A} = \left(xz + \frac{z^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2}, 0, \frac{y^2}{2} + zy \right).$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} + \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g}$$

onde as orientações de C_1 e C_2 devem ser compatíveis com a normal unitária $\mathbf{n}$. Mais precisamente, C_1 deve ser percorrida no sentido directo quando vista do semieixo positivo dos zz, e C_2 no sentido inverso. Uma parametrização para C_1 é $\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, e portanto

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} &= \int_0^{2\pi} \left(-\operatorname{sen}\theta \cos\theta - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}, 0, \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} \right) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^2\theta \cos\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^3\theta \right) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Uma parametrização para C_2 é $\mathbf{g}(\theta) = (2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, 1)$; o sentido de C_2 correspondente a esta parametrização é no entanto o contrário àquele que pretendemos, pelo que

$$
\begin{aligned}
&\oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} = \\
&= -\int_0^{2\pi} \left(2\cos\theta + \frac{1}{2} - 2\operatorname{sen}^2\theta - 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta, 0, 2\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\right) \cdot (-2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 0) d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \left(-4\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta + 4\operatorname{sen}^3\theta + 8\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\right) d\theta = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\int_S \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = 0.$$