Integrais de Linha e de Superfície (Resolução Sumária)

19 de Maio de 2009

1. Calcule a área da superfície curva de um cone circular recto de altura $h > 0$ e raio da base $a > 0$.

   Resolução: Uma parametrização desta superfície é por exemplo $\mathbf{g} :]0, a[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por
   $$\mathbf{g}(r, \theta) = \left(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \frac{h}{a} r \right).$$
   O elemento de área correspondente a esta parametrização é
   $$\sqrt{\det G(r, \theta)},$$
   onde G é a matriz 2×2 dada por
   $$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} = \left(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \frac{h}{a} \right) \cdot \left(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \frac{h}{a} \right) = 1 + \frac{h^2}{a^2}; \\ G_{12} = G_{21} &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = \left(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, \frac{h}{a} \right) \cdot (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0) = 0; \\ G_{22} &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0) \cdot (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0) = r^2. \end{aligned}$$
   Portanto
   $$\det G(r, \theta) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{h^2}{a^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix} = r^2 \left(1 + \frac{h^2}{a^2} \right)$$
   e a área da superfície é
   $$\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} \int_0^a \int_0^{2\pi} r d\theta dr = 2\pi \frac{a^2}{2} \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} = \pi a \sqrt{a^2 + h^2}.$$

2. Escreva a área do elipsóide de semieixos $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ como um integral iterado.

   Resolução: Uma parametrização desta superfície é por exemplo $\mathbf{g} :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por
   $$\mathbf{g}(\theta, \varphi) = (a\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, b\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, c\cos\theta).$$
   O elemento de área correspondente a esta parametrização é
   $$\sqrt{\det G(\theta, \varphi)},$$

onde G é a matriz 2×2 dada por

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (a\cos\theta\cos\varphi, b\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, -c\operatorname{sen}\theta) \cdot (a\cos\theta\cos\varphi, b\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, -c\operatorname{sen}\theta) \\
&= a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + b^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + c^2\operatorname{sen}^2\theta; \\
G_{12} &= G_{21} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} = (a\cos\theta\cos\varphi, b\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, -c\operatorname{sen}\theta) \cdot (-a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, b\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, 0) \\
&= (b^2 - a^2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi; \\
G_{22} &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} = (-a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, b\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, 0) \cdot (-a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, b\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, 0) \\
&= a^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\det G(r,\theta) &= \begin{vmatrix} a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + b^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + c^2\operatorname{sen}^2\theta & (b^2 - a^2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \\ (b^2 - a^2)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi & a^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi \end{vmatrix} \\
&= a^2b^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + a^2c^2\operatorname{sen}^4\theta\operatorname{sen}^2\varphi + b^2c^2\operatorname{sen}^4\theta\cos^2\varphi
\end{aligned}$$

e a área da superfície é

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\sqrt{a^2b^2\cos^2\theta + a^2c^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + b^2c^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi}\,d\varphi d\theta.$$

3. Prove o Segundo Teorema de Pappus: a área de uma superfície de revolução gerada por uma curva plana é igual a $2\pi dL$, onde L é o comprimento da curva plana e d é a distância do seu centróide ao eixo de rotação. Aproveite este resultado para calcular a área da superfície do toro
$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \le r^2\right\}$$
$(0 < r < R)$.

Resolução: Se a curva é parametrizada por $\mathbf{c} :]0,1[\to \mathbb{R}^2$,
$$\mathbf{c}(t) = (u(t), v(t))$$
uma parametrização da superfície de revolução gerada pela curva é $\mathbf{g} :]0,1[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por
$$\mathbf{g}(t,\varphi) = (u(t)\cos\theta, u(t)\operatorname{sen}\theta, v(t)).$$
O elemento de área correspondente a esta parametrização é
$$\sqrt{\det G(t,\theta)},$$
onde G é a matriz 2×2 dada por

$$\begin{aligned}
G_{11} &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = (u'\cos\theta, u'\operatorname{sen}\theta, v') \cdot (u'\cos\theta, u'\operatorname{sen}\theta, v') = (u')^2 + (v')^2; \\
G_{12} &= G_{21} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (u'\cos\theta, u'\operatorname{sen}\theta, v') \cdot (-u\operatorname{sen}\theta, u\cos\theta, 0) = 0; \\
G_{22} &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} = (-u\operatorname{sen}\theta, u\cos\theta, 0) \cdot (-u\operatorname{sen}\theta, u\cos\theta, 0) = u^2.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\det G(r,\theta) = \begin{vmatrix} (u')^2+(v')^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{vmatrix} = u^2\left((u')^2+(v')^2\right)$$

e a área da superfície é

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} u\sqrt{(u')^2+(v')^2}\,d\theta dt = 2\pi \int_0^1 u\sqrt{(u')^2+(v')^2}\,dt.$$

Ora o elemento de comprimento correspondente à parametrização $\mathbf{c}$ é

$$\sqrt{\frac{d\mathbf{c}}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{c}}{dt}} = \sqrt{(u')^2+(v')^2}$$

e a coordenada u do seu centróide é portanto

$$u_C = d = \frac{1}{L}\int_0^1 u\sqrt{(u')^2+(v')^2}\,dt.$$

Concluimos que a área da superfície é $2\pi dL$. No caso do toro, $d=R$ e $L=2\pi r$, pelo que a área da superfície do toro é $4\pi^2 rR$. É também fácil ver que a superfície cónica do exercício 1 se pode obter por rotação do segmento de recta unindo os pontos $(0,0)$ e (a,h), pelo que $d=\frac{a}{2}$ e $L=\sqrt{a^2+h^2}$, vindo a área do cone $2\pi\frac{a}{2}\sqrt{a^2+h^2}$ (em conformidade com o que já havíamos obtido).

4. Seja S a superfície

$$S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2, z\le 1\right\}.$$

Calcule:

(a) A área de S;

Resolução: Uma parametrização desta superfície é por exemplo $\mathbf{g} :]0,1[\times]0,2\pi[\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, r^2).$$

O elemento de área correspondente a esta parametrização é

$$\sqrt{\det G(r,\theta)},$$

onde G é a matriz 2×2 dada por

$$G_{11} = \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial r} = (\cos\theta,\mathrm{sen}\,\theta,2r)\cdot(\cos\theta,\mathrm{sen}\,\theta,2r) = 1+4r^2;$$
$$G_{12} = G_{21} = \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\theta} = (\cos\theta,\mathrm{sen}\,\theta,2r)\cdot(-r\,\mathrm{sen}\,\theta,r\cos\theta,0) = 0;$$
$$G_{22} = \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\theta} = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta,r\cos\theta,0)\cdot(-r\,\mathrm{sen}\,\theta,r\cos\theta,0) = r^2.$$

Portanto

$$\det G(r,\theta) = \begin{vmatrix} 1+4r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix} = r^2\left(1+4r^2\right)$$

e a área da superfície é

$$V_2(S)=\int_S 1=\int_0^1\int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2}d\theta dr=2\pi\left[\frac{1}{12}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

(b) O centróide de S.

Resolução: Por simetria o centróide situa-se no eixo dos zz, i.e., $x_C=y_C=0$. Como

$$\begin{aligned}\int_S z&=\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\sqrt{1+4r^2}d\theta dr=2\pi\int_0^1 u\sqrt{1+4u}\frac{du}{2}\\&=\pi\left[u\frac{1}{6}(1+4u)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1-\pi\int_0^1\frac{1}{6}(1+4u)^{\frac{3}{2}}du=\frac{\pi}{6}5^{\frac{3}{2}}-\pi\left[\frac{1}{60}(1+4u)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1\\&=\frac{\pi}{6}5^{\frac{3}{2}}-\pi\frac{1}{60}(5)^{\frac{5}{2}}+\pi\frac{1}{60}=\frac{\pi}{12}5^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{60}\end{aligned}$$

temos

$$z_C=\frac{1}{V_2(S)}\int_S z=\frac{\frac{\pi}{12}5^{\frac{3}{2}}+\frac{\pi}{60}}{\frac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right)}=\frac{\frac{1}{2}5^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{10}}{5^{\frac{3}{2}}-1}.$$

5. Calcule o trabalho realizado pela força

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(y+z,x+z,x+y)$$

ao longo da curva

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x=\cos\theta, y=\operatorname{sen}\theta, z=2\theta, 0\le\theta\le 2\pi\}$$

percorrida no sentido dos valores de z decrescentes.

Resolução: Uma parametrização desta curva é por exemplo $\mathbf{g}:]0,2\pi[\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta)=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,2\theta),$$

que no entanto corresponde às orientação inversa da pretendida. O integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo da curva com esta orientação é

$$\begin{aligned}&\int_C(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz\\&=\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}\theta+2\theta,\cos\theta+2\theta,\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)\cdot(-\operatorname{sen}\theta,\cos\theta,2)d\theta\\&=\int_0^{2\pi}(-\operatorname{sen}^2\theta-2\theta\operatorname{sen}\theta+\cos^2\theta+2\theta\cos\theta+2\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta)d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)d\theta+\left[2\theta\cos\theta+2\theta\operatorname{sen}\theta\right]_0^{2\pi}=4\pi,\end{aligned}$$

pelo que o trabalho realizado é então -4π.

6. O campo de velocidades de um fluido é descrito pelo campo vectorial

$$\mathbf{v}=(x,y,-2z).$$

Supondo que o fluido possui densidade constante igual a 1, calcule a massa de fluido que atravessa a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

por unidade de tempo no sentido dos valores de z decrescentes.

Resolução: Uma parametrização de S é por exemplo $\mathbf{g} :]0, 1[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{g}(r, \theta) = \big(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\big)\,.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 2r\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \end{vmatrix} \\ &= \big(-r^2\operatorname{sen}\theta, -r^2\cos\theta, r\big)\end{aligned}$$

aponta para cima, concluímos que o fluxo de $\mathbf{v}$ no sentido dos valores de z decrescentes é

$$\begin{aligned}&\int_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = \\ &= -\int_0^1\int_0^{2\pi} \big(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, -2r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\big)\cdot\big(-r^2\operatorname{sen}\theta, -r^2\cos\theta, r\big)\,d\theta dr \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} 4r^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta dr = 0.\end{aligned}$$