Integrais de Linha e de Superfície

19 de Maio de 2009

1. Calcule a área da superfície curva de um cone circular recto de altura $h > 0$ e raio da base $a > 0$.

2. Escreva a área do elipsóide de semieixos $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ como um integral iterado.

3. Prove o Segundo Teorema de Pappus: a área de uma superfície de revolução gerada por uma curva plana é igual a $2\pi dL$, onde L é o comprimento da curva plana e d é a distância do seu centróide ao eixo de rotação. Aproveite este resultado para calcular a área da superfície do toro
$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\right\}$$
$(0 < r < R)$.

4. Seja S a superfície
$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z \leq 1\right\}.$$
Calcule:
   (a) A área de S;
   (b) O centróide de S.

5. Calcule o trabalho realizado pela força
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$
ao longo da curva
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos\theta, y = \operatorname{sen}\theta, z = 2\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$
percorrida no sentido dos valores de z decrescentes.

6. O campo de velocidades de um fluido é descrito pelo campo vectorial
$$\mathbf{v} = (x, y, -2z).$$
Supondo que o fluido possui densidade constante igual a 1, calcule a massa de fluido que atravessa a superfície
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}z = xy, x^2 + y^2 \leq 1\}$$
por unidade de tempo no sentido dos valores de z decrescentes.