Teorema de Fubini e Mudança de Variáveis (Resolução Sumária)

19 de Maio de 2009

1. Escreva $\int_A f dV_2$ como um integral iterado nas duas ordens de integração possíveis, onde o conjunto A é:

   (a) O triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(2,1)$;
   Resolução:

$$\begin{aligned}\int_A f dV_2 &= \int_0^1 \int_0^{\frac{x}{2}} f(x,y)dydx + \int_1^2 \int_{x-1}^{\frac{x}{2}} f(x,y)dydx \\ &= \int_0^1 \int_{2y}^{y+1} f(x,y)dxdy.\end{aligned}$$

   (b) O sector circular com centro em $(0,0)$ e cujo arco é o menor arco circular unindo os pontos $(1,1)$ e $(1,-1)$;
   Resolução:

$$\begin{aligned}\int_A f dV_2 &= \int_0^1 \int_{-x}^{x} f(x,y)dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dydx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{|y|}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dxdy.\end{aligned}$$

   (c) A região compreendida entre as circunferências de raios 1 e 2 centradas na origem.
   Resolução:

$$\begin{aligned}\int_A f dV_2 = &\int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx\end{aligned}$$

   (a outra ordem de integração é completamente análoga).

2. Escreva $\int_A f dV_3$ como um integral iterado numa ordem de integração à sua escolha, onde o conjunto A é:

   (a) O tetraedro limitado pelos planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$;
   Resolução: Por exemplo,

$$\int_A f dV_3 = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)dzdydx.$$

(b) A esfera $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 4\}$;
Resolução: Por exemplo,

$$\int_A f dV_3 = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)dzdydx.$$

(c) O cone $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1\}$.
Resolução: Por exemplo,

$$\int_A f dV_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dzdydx.$$

3. Escreva o volume do sólido

$$A = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4\right\}$$

como um integral iterado numa ordem de integração à sua escolha.

Resolução: Por exemplo,

$$\begin{aligned} V_3(A) = &\int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1dydxdz + \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{-\sqrt{1-z^2}}\int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1dydxdz \\ &+ \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{-\sqrt{1-z^2-x^2}} 1dydxdz + \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{\sqrt{1-z^2-x^2}}^{-\sqrt{4-z^2-x^2}} 1dydxdz \\ &+ \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1dydxdz + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} 1dydxdz. \end{aligned}$$

4. Inverta a ordem de integração nos seguintes integrais iterados:

(a) $\displaystyle\int_0^4\int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dydx$;

Resolução: $\displaystyle\int_0^{48}\int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dxdy.$

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_{2x}^{3x} f(x,y)dydx$;

Resolução: $\displaystyle\int_0^2\int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dxdy + \int_2^3\int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)dxdy.$

(c) $\displaystyle\int_0^2\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)dydx$;

Resolução:

$$\int_0^1\int_{\frac{y^2}{4}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy + \int_0^1\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)dxdy + \int_1^{\sqrt{2}}\int_{\frac{y^2}{4}}^{2} f(x,y)dxdy$$

5. Calcule o volume de um cone circular recto de altura $h > 0$ e raio da base $a > 0$.

   Resolução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z), o cone pode ser descrito por $\frac{h}{a}\rho \leq z \leq h$, e portanto o seu volume é dado por

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{\frac{h}{a}\rho}^h \rho dz d\varphi d\rho = 2\pi \int_0^a \left(h\rho - \frac{h}{a}\rho^2 \right) d\rho = \pi h a^2 - \frac{2\pi h a^2}{3} = \frac{\pi a^2 h}{3}.$$

6. Uma esfera de raio 2 é perfurada por uma broca de raio 1. Determine o volume do sólido resultante.

   Resolução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z), a esfera pode ser descrita por $\rho^2 + z^2 \leq 4$, e a broca por $\rho \leq 1$. A intersecção das superfícies de ambos ocorre para $z^2 = 3$, e portanto o volume do sólido resultante será

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} \rho d\rho d\varphi dz = 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4 - z^2 - 1}{2} dz = 4\pi\sqrt{3}.$$

7. Seja A o elipsóide

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

   (a) Calcule o volume de A.

   Resolução: Em termos das variáveis (u, v, w) definidas na sugestão, o conjunto A é descrito por $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$, i.e., é uma esfera de raio 1. Uma vez que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = abc,$$

   pelo teorema da mudança de variável temos

$$V_3(A) = \int_{\{u^2+v^2+w^2 \leq 1\}} abc\, dudvdw = \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} abc\, r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{4\pi abc}{3}.$$

   (b) Supondo que A possui densidade constante igual a 1, calcule o momento de inércia do elipsóide em relação ao eixo dos zz.

   Resolução:

$$\begin{aligned} I_z(A) &= \int_{\{u^2+v^2+w^2 \leq 1\}} (a^2u^2 + b^2v^2) abc\, dudvdw \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (a^2r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\varphi + b^2r^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi) abc\, r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{1}{5}\pi abc \int_0^{\pi} (a^2 + b^2)(1 - \cos^2\theta) \operatorname{sen}\theta d\theta = \frac{4\pi}{15} abc(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Sugestão: *Utilize a mudança de variável* $(x, y, z) = (au, bv, cw)$).

8. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável e com medida finita, uma *pirâmide* de base A e vértice $h\mathbf{e}_{n+1}$ é o conjunto

$$P = \{(a^1(1-t), \dots, a^n(1-t), ht) \in \mathbb{R}^{n+1} : (a^1, \dots, a^n) \in A, 0 \le t \le 1\}.$$

Prove que

$$V_{n+1}(P) = \frac{h}{n+1} V_n(A).$$

Aproveite este resultado para confirmar a fórmula da área do triângulo e o resultado que obteve na questão 5. (**Sugestão:** *Utilize a mudança de variável* $(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) = (a^1(1-t), \dots, a^n(1-t), ht)$).

Resolução: Em termos das variáveis $(a^1, \dots, a^n, t)$ definidas na sugestão, a pirâmide P é dada por $A \times [0,1]$. Uma vez que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial a^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial a^n} & \frac{\partial x^1}{\partial t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^n}{\partial a^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial a^n} & \frac{\partial x^n}{\partial t} \\ \frac{\partial x^{n+1}}{\partial a^1} & \dots & \frac{\partial x^{n+1}}{\partial a^n} & \frac{\partial x^{n+1}}{\partial t} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1-t & \dots & 0 & -a^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1-t & -a^n \\ 0 & \dots & 0 & h \end{bmatrix} = (1-t)^n h,$$

pelo teorema da mudança de variável temos

$$V_{n+1}(P) = \int_A \int_0^1 h(1-t)^n dt dV_n = hV_n(A) \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{h}{n+1} V_n(A).$$

9. Prove o Teorema de Pappus: o volume de um sólido de revolução gerado por uma figura plana é igual a $2\pi dA$, onde A é a área da figura plana e d é a distância do seu centróide ao eixo de rotação. Aproveite este resultado para calcular o volume do toro

$$T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 \le r^2 \right\}$$

$(0 < r < R)$.

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z), o volume do sólido de revolução é dado por

$$V = \int_0^{2\pi} \iint_{\text{figura}} \rho d\rho dz d\varphi = 2\pi dA,$$

uma vez que por definição

$$d = \frac{1}{A} \iint_{\text{figura}} \rho d\rho dz.$$

Consequentemente, o volume do toro é $2\pi R(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R$.

10. Seja A o sólido

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1, z \ge \sqrt{x^2+y^2}, 0 \le x \le y \right\}$$

e densidade $\rho(x,y,z) = z$. Calcule:

(a) O volume de A;

Resolução: Em coordenadas esféricas (r, θ, φ), o volume do sólido é dado por

$$V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{12}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(b) A massa de A;

Resolução: Nas mesmas coordenadas, e uma vez que a densidade é $z = r\cos\theta$,

$$M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{64}.$$

(c) O centróide de A;

Resolução: Uma vez que $x = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$, a coordenada x_C do centróide é dada por

$$x_C V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{\sqrt{2}}{16}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right),$$

ou seja,

$$x_C = \frac{3(\pi - 2)(\sqrt{2} + 1)}{8\pi}.$$

Analogamente, uma vez que $y = r\operatorname{sen}\theta\sin\varphi$, a coordenada y_C do centróide é dada por

$$y_C V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{\sqrt{2}}{32},$$

ou seja,

$$y_C = \frac{3(\sqrt{2} + 1)}{8\pi}.$$

Finalmente, uma vez que $z = r\cos\theta$, a coordenada z_C do centróide é dada por

$$z_C V = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = M,$$

ou seja,

$$z_C = \frac{M}{V} = \frac{3\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{16}$$

(d) O centro de massa de A;

Resolução: Uma vez que $x = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$, a coordenada x_{CM} do centro de massa é dada por

$$x_{CM} M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi r\cos\theta r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{1}{60},$$

ou seja,

$$x_{CM} = \frac{16}{15\pi}.$$

Analogamente, uma vez que $y = r \operatorname{sen}\theta \sin\varphi$, a coordenada y_{CM} do centro de massa é dada por

$$y_{CM}M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi r \cos\theta r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{\sqrt{2}}{60}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

ou seja,

$$y_{CM} = \frac{16}{15\pi}\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Finalmente, uma vez que $z = r\cos\theta$, a coordenada z_{CM} do centro de massa é dada por

$$z_{CM}M = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r \cos\theta r \cos\theta r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{60}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right),$$

ou seja,

$$z_{CM} = \frac{16}{15}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

(e) O momento de inércia de A em relação ao eixo dos zz.

Resolução: Uma vez que o quadrado da distância ao eixo dos zz é dado por

$$x^2 + y^2 = r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\varphi = r^2 \operatorname{sen}^2\theta,$$

o momento de inércia pedido é

$$I_z = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \operatorname{sen}^2\theta r \cos\theta r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr = \frac{\pi}{96}.$$