Teorema de Fubini e Mudança de Variáveis

19 de Maio de 2009

1. Escreva $\int_A f dV_2$ como um integral iterado nas duas ordens de integração possíveis, onde o conjunto A é:

   (a) O triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(2,1)$;

   (b) O sector circular com centro em $(0,0)$ e cujo arco é o menor arco circular unindo os pontos $(1,1)$ e $(1,-1)$;

   (c) A região compreendida entre as circunferências de raios 1 e 2 centradas na origem.

2. Escreva $\int_A f dV_3$ como um integral iterado numa ordem de integração à sua escolha, onde o conjunto A é:

   (a) O tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$;

   (b) A esfera $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$;

   (c) O cone $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$.

3. Escreva o volume do sólido

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}$$

   como um integral iterado numa ordem de integração à sua escolha.

4. Inverta a ordem de integração nos seguintes integrais iterados:

   (a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y) dy dx$;

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y) dy dx$;

   (c) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y) dy dx$;

5. Calcule o volume de um cone circular recto de altura $h > 0$ e raio da base $a > 0$.

6. Uma esfera de raio 2 é perfurada por uma broca de raio 1. Determine o volume do sólido resultante.

7. Seja A o elipsóide

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}.$$

(a) Calcule o volume de A.

(b) Supondo que A possui densidade constante igual a 1, calcule o momento de inércia do elipsóide em relação ao eixo dos zz.

Sugestão: *Utilize a mudança de variável* $(x, y, z) = (au, bv, cw)$).

8. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável e com medida finita, uma *pirâmide* de base A e vértice $h\mathbf{e}_{n+1}$ é o conjunto

$$P = \{(a^1(1-t), \ldots, a^n(1-t), ht) \in \mathbb{R}^{n+1} : (a^1, \ldots, a^n) \in A, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Prove que

$$V_{n+1}(P) = \frac{h}{n+1} V_n(A).$$

Aproveite este resultado para confirmar a fórmula da área do triângulo e o resultado que obteve na questão 5. (**Sugestão:** *Utilize a mudança de variável* $(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) = (a^1(1-t), \ldots, a^n(1-t), ht)$).

9. Prove o Teorema de Pappus: o volume de um sólido de revolução gerado por uma figura plana é igual a $2\pi dA$, onde A é a área da figura plana e d é a distância do seu centróide ao eixo de rotação. Aproveite este resultado para calcular o volume do toro

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\right\}$$

$(0 < r < R)$.

10. Seja A o sólido

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq x \leq y\right\}$$

e densidade $\rho(x, y, z) = z$. Calcule:

(a) O volume de A;

(b) A massa de A;

(c) O centróide de A;

(d) O centro de massa de A;

(e) O momento de inércia de A em relação ao eixo dos zz.