9ª Aula Prática

1) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\,\dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

b) Calcule as derivadas parciais na origem.

2) Considere as funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{3x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcule as derivadas parciais de f e de g, nos pontos em que existam.

3) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{se } x+y > 0 \\ x+y & \text{se } x+y \leq 0 \end{cases}$$

a) Calcule, caso existam, as derivadas parciais de f no ponto $(0,0)$.

b) Determine, se existirem, as derivadas de f segundo o vector $(1,1)$ nos pontos $(1,1)$ e $(1,-1)$.

4) Seja g a função definida em $\mathbb{R}^2$ por:

$$g(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } xy > 0 \\ 0 & \text{se } xy \leq 0 \end{cases}$$

a) Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

b) Calcule $g'((0,0);(1,1))$. Que pode concluir quanto à diferenciabilidade de g no ponto $(0,0)$?

5) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x\,\mathrm{sen}\,y\ .$$

Verifique se a função é diferenciável no ponto (1,0), recorrendo à definição de diferenciabilidade.

6) Estude a função f definida em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ pela expressão

$$f(x,y,z) = e^{-1/(x^2+y^2+z^2)}$$

quanto à diferenciabilidade, e calcule as suas derivadas parciais.

10ª Aula Prática

1) Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Mostre que f é contínua em todo o seu domínio.

b) Estude f quanto à diferenciabilidade no ponto $(0,0)$.

2) Seja $F : D \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$F(x,y) = \left(\frac{xy}{1-x^2-y^2}, \frac{\sqrt{y^2-x}}{x} \right),$$

no domínio de existência desta expressão.

a) Represente geometricamente o domínio D.

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de F.

c) Calcule $F'_{(1,1)}(1,2)$.

3) Prove que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável. Mostre que as derivadas parciais não são contínuas na origem.

4) Considere a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$g_1(u,v,w) = e^u \cos v \, \cos w$$
$$g_2(u,v,w) = e^u \cos v \, \operatorname{sen} w$$
$$g_3(u,v,w) = e^u \operatorname{sen} v$$

a) Determine o domínio de diferenciabilidade de g e defina a derivada $Dg(0,0,0)$.

b) Sendo f uma função de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$, diferenciável no ponto $(1,0,0)$, mostre que $f \circ g$ é diferenciável em $(0,0,0)$ e determine $D(f\circ g)(0,0,0)$, sabendo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,0) = (1,2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,0) = (-1,0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,0) = (-1,3)$$

5) Sejam $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$ e $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\psi(u, v) = \operatorname{arctg}(u^2 + v) \ .$$

Calcule $(\psi \circ \varphi)'(0, 0, 0)$, sabendo que $\varphi(0, 0, 0) = (1, 2)$ e que as coordenadas da derivada de φ no ponto $(0, 0, 0)$ são as funções dadas por:

$$L_1(x, y, z) = 2x + 3y + z$$
$$L_2(x, y, z) = x - y + z$$

6) Sabendo que $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$ e que $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é a função definida por $\psi(x, y, z) = \varphi(x - y, y - z, z - x)$, mostre que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{(para qualquer } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.\text{)}$$

7) Sendo F uma função real diferenciável em $\mathbb{R}$ e $z = xy + xF(y/x)$, mostre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

para todo $x \neq 0$.

11ª Aula Prática

1) Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y, z) = G(x^2 - y^2, y^2 - z^2) \ ,$$

onde G é uma função real diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Indique em que pontos F é diferenciável e mostre que

$$yzF'_x(x, y, z) + xzF'_y(x, y, z) + xyF'_z(x, y, z) = 0$$

para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

2) Sabendo que f é uma função real de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, considere a função G definida por $G(u, v) = f(u^2 + v^2, u/v)$. Mostre que para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $v \neq 0$ a derivada $G'_{(u,v)}(u, v)$ existe e é dada por

$$G'_{(u,v)}(u, v) = 2(u^2 + v^2)(D_1 f)(u^2 + v^2, u/v) \ .$$

3) Sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(-1, 1) = -1$, considere a função G definida pela expressão $G(x, y) = f\big(f(x, y), f^2(x, y)\big)$. Mostre que

$$\frac{\partial G}{\partial x}(-1, 1) + 2\frac{\partial G}{\partial y}(-1, 1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1)\right)^2 - 4\left(\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1)\right)^2 \ .$$

4) Supondo que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x, y) = f(x, x + y, xy)$$

a) Exprima $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ em termos das derivadas parciais de f.

b) Aproveite o resultado anterior para verificar a igualdade

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)(2, 1) - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(2, 1) = f'_1(2, 3, 2) - f'_3(2, 3, 2) \ .$$

5) Sendo f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$u(x, t) = af(x + ct) + bf(x - ct) \ ,$$

com a, b e c constantes reais e $c \neq 0$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

para quaisquer x e t.

6) Sabendo que F é uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ com derivadas mistas de segunda ordem nulas, mostre que

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

para $x, y \neq 0$, sendo u a função definida em $\mathbb{R}^2$ pela expressão $u(x,y) = F(x^2 - y^2, y^2)$.