Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

8^a Ficha de Exercícios

(Eng.$^{\text{a}}$ Electrotécnica e Gestão)

Continuidade e Limites

1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Para cada $c \in \mathbb{R}$, considere o conjunto

$$N_c = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, f(x) = c\} \, .$$

   a) Mostre que, se f é contínua, N_c é fechado, qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$.

   b) Dê um exemplo de uma função f e de $c \in \mathbb{R}$, tal que N_c não seja fechado.

2. Calcule ou mostre que não existem, os seguintes limites:

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^4+2y^2}$, b) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log^2(x+y)}{\sin \log(x+y)}$,

   c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$, d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y^2}{(x^4+2y^2)^2}$,

   e) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x-1}{x-1+y-\log x}$

3. Seja $f(x,y) = 0$ se $y \leq 0$ ou se $y \geq x^2$, e seja $f(x,y) = 1$, se $0 < y < x^2$. Mostre que $f(x,y) \to 0$, quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo de qualquer recta que passe pela origem. Encontre uma curva que passe pela origem ao longo da qual f toma o valor 1, excepto na origem. Será f contínua na origem? Justifique.

4. Determinar o domínio e o conjunto de pontos de descontinuidade de cada uma das seguintes funções:

   a) $f(x,y) = \sqrt{(1-x^2-y^2)H(1-x^2-y^2)}$, onde $H(\cdot)$ é a função de Heaviside.

   b) $\psi(x,y) = x^{y^2}$

   c) $g(x,y) = \arccos \sqrt{x/y}$

   d) $\boldsymbol{\varphi}(x,y,z) = \left(\log \sqrt{x^2+y^2+z^2}, (1-x^2-y^2-z^2)^{-1}\right)$

   e) $h(u,v,w) = \tan \frac{u^2}{vw}$

5. Seja $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \theta(x,y)$ existe e é igual a L. Suponha ainda que, para todo o y, existe o limite $\lim_{x\to a} \theta(x,y)$, e, para todo o x, existe o limite $\lim_{y\to b} \theta(x,y)$. Mostre que $\lim_{x\to a} \lim_{y\to b} \theta(x,y) = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} \theta(x,y) = L$.

6. Estude quanto á continuidade a função f de $\mathbb{R}^2$ com valores em $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x^2+y^2 < 2y, \\ |x| & \text{se } x^2+y^2 = 2y, \\ y^2 & \text{se } x^2+y^2 > 2y. \end{cases}$$

7. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\tan(x\sqrt{|y|})}{x^2+|y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Mostre que $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0\,.$

b) Mostre que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

c) Verifique que existem as derivadas parciais de f em $(0,0)$ e diga qual o seu valor.

(*Recomendação: É extremamente útil que as funções sejam visualmente exploradas utilizando a representação gráfica fornecida por software apropriado, como o Mathematica, antes, durante ou após—mas nunca* em vez de—*a resolução das questões 2, 3, 4a)-c), 6 e 7. A exploração dos gráficos é extremamente importante para o desenvolvimento de uma intuição mas deve ser devidamente guiada pelo estudo analítico, sem o que o resultado final poderá ser desastroso!*)