Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

7^a Ficha de Exercícios

(Eng.[a] Electrotécnica e Gestão)

Estruturas algébrica, métrica e topológica de $\mathbb{R}^n$

1. Considere os seguintes conjuntos

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \wedge 4x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$
$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\right\}$$
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > |y|\right\}$$
$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| + |y| \leq 2\right\}$$
$$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(x+y) \leq 0\right\}$$
$$G = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \sin \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \geq 0\right\}$$
$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = \frac{1}{n} \wedge \sqrt{x^2 + z^2} \leq \frac{1}{n}\right\}$$
$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : n + \log \|\mathbf{x} - n\mathbf{1}\| \in \mathbb{R}^-\right\}, \text{ onde } \mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$$

a) Esboce os conjuntos anteriores (no caso Ω considere $m = 2$) e ainda $A \cap D$ e $A \times [0,1]$.

b) Para cada um dos conjuntos acima determine o seu interior, exterior, fronteira, aderência e diga, justificando, se é aberto, fechado, limitado, compacto, ou conexo.

c) Dê, quando possível, exemplos de sucessões nas condições seguintes, justificando cuidadosamente as respostas:
(i) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em ∂D tal que $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, com $\mathbf{x} \in A$.
(ii) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em $A \setminus D$ tal que $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, com $\mathbf{x} \in D$.
(iii) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em G tal que $\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$.
(iv) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em E, convergente para um ponto de D^c, onde D^c é o complementar de D.
(v) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em E, divergente, mas com todos os sublimites em D^c.
(vi) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em E, divergente, sem subsucessões convergentes.
(vii) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em C, divergente, sem subsucessões convergentes.

2. Sejam $(\mathbf{u}_n)$ e $(\mathbf{v}_n)$ duas sucessões de termos em $\mathbb{R}^m$ e suponha que $(\mathbf{u}_n)$ converge para o vector nulo e que $(\mathbf{v}_n)$ é limitada. Prove que a sucessão real de termo geral $\mathbf{u}_n \cdot \mathbf{v}_n$ converge para 0.

3. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}^m$. Relembre-se que $A \cup B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \in A \vee \mathbf{x} \in B\}$, $A \cap B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \in A \wedge \mathbf{x} \in B\}$ e

$A+B=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m : \mathbf{x}=\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}\in A\wedge\mathbf{b}\in B\}$. Tomando para C cada um deste conjuntos, mostre que são verdadeiras, ou exiba um contra-exemplo se forem falsas, as seguintes proposições:
(i) Se A e B são limitados, então C é limitado.
(ii) Se A e B são compactos, então C é compacto.
(iii) Se A e B são conexos, então C é conexo.

4. Seja $\mathbf{z}\neq\mathbf{0}$ um ponto de $\mathbb{R}^m$. Mostre que o semi-espaço $\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m : \mathbf{x}\cdot\mathbf{z}<0\}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$.