Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

10^a Ficha de Exercícios

(Eng.^{a} Electrotécnica e Gestão)

Derivação da função composta

1. Calcule $F'(t)$ e $F''(t)$ nos casos em que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

   a) $F(t) = f[g(t)]$, com $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\quad g(t) = t\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2$,

   b) $F = f \circ g$, com $f(x, y) = e^{xy}\cos(xy^2)$, $\quad g(t) = (\cos t, \sin t)$,

   c) $F(t) = f(X(t), Y(t))$, com $f(x, y) = \log\left[(1 + e^{x^2})/(1 + e^{y^2})\right]$, $\quad X(t) = e^t$, $Y(t) = e^{-t}$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = F[g(x, y)]$, com $F(t) = e^{\sin t}$, $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$. Calcule $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ usando o teorema da derivação da funcção composta. Verifique o resultado determinando explicitamente $f(x, y)$ e calculando as derivadas parciais directamente.

3. As expressões $u = f(x, y)$, $x = X(s, t)$, $y = Y(s, t)$, definem u como função de s e t, digamos $u = F(s, t)$. Exprima as derivadas parciais de 1^a. e 2^a. ordem da função F em termos das derivadas parciais de 1^a. e 2^a. ordem da função f, quando:

   a) $X(s, t) = s + t$, $\qquad Y(s, t) = st$,

   b) $X(s, t) = st$, $\qquad Y(s, t) = s/t$,

   c) $X(s, t) = (s - t)/2$, $\qquad Y(s, t) = (s + t)/2$.

4. Responda à questão semelhante à anterior quando $u = f(x, y, z)$, $x = X(r, s, t)$, $y = Y(r, s, t)$, $z = Z(r, s, t)$, e quando:

   a) $X(r, s, t) = r + s + t$, $\quad Y(r, s, t) = r - 2s + 3t$,

   b) $X(r, s, t) = r^2 + s^2 + t^2$, $\quad Y(r, s, t) = r^2 - s^2 - t^2$, $\quad Z(r, s, t) = r^2 - s^2 + t^2$.

5. Responda à questão semelhante à questão 3, quando $u = f(x, y, z)$, $x = X(s, t)$, $y = Y(s, t)$, $z = Z(s, t)$, e quando:

   a) $X(s, t) = s^2 + t^2$, $\qquad Y(s, t) = s^2 - t^2$, $\qquad Z(s, t) = 2st$,

   b) $X(s, t) = s + t$, $\qquad Y(s, t) = s - t$, $\qquad Z(s, t) = st$.

6. Responda à questão semelhante à questão 3, quando $u = f(x, y)$, $x = X(r, s, t)$, $y = Y(r, s, t)$, e quando:

a) $X(r,s,t) = r + s, \quad Y(r,s,t) = t$,

b) $X(r,s,t) = r + s + t, \quad Y(r,s,t) = r^2 + s^2 + t^2$,

c) $X(r,s,t) = r/s, \quad Y(r,s,t) = s/t$.

7. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2. Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$, onde c é uma constante, satisfaz a equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Mostre que $u(x,y) = f(xy)$, satisfaz a equação

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

9. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que

$$f(x,y) = e^{x+2y}\mathbf{e}_1 + \sin(y+2x)\mathbf{e}_2,$$

$$g(u,v,w) = (u + 2v^2 + 3w^3)\mathbf{e}_1 + (2v - u^2)\mathbf{e}_2.$$

a) Calcule as matrizes jacobianas $Df(x,y)$ e $Dg(u,v,w)$.

b) Calcule a função composta $h(u,v,w) = f[g(u,v,w)]$.

c) Calcule a matriz jacobiana $Dh(1,-1,1)$.

10. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que

$$f(x,y,z) = (x^2 + y + z)\mathbf{e}_1 + (2x + y + z^2)\mathbf{e}_2,$$

$$g(u,v,w) = uv^2w^2\mathbf{e}_1 + w^2 \sin v\mathbf{e}_2 + u^2e^v\mathbf{e}_3.$$

a) Calcule as matrizes jacobianas $Df(x,y,z)$ e $Dg(u,v,w)$.

b) Calcule a função composta $h(u,v,w) = f[g(u,v,w)]$.

c) Calcule a matriz jacobiana $Dh(u,v,w)$.

11. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tais que $g(x,y) = (e^{xy^2}, e^{x^2y}, xy)$, f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$, $f(1,1,0) = (1,0)$ e

$$Df(1,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Justifique que $g \circ f$ e $f \circ g$ são diferenciáveis e identifique as aplicações $(g \circ f)'(1,1,0)$ e $(f \circ g)'(1,0)$.