Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

TESTE 2 - VERSÃO B

2 de Junho de 2012 - das 9h00 às 10h30

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + 1 = zx\}$$
[2 v] (a) Mostre que M é uma variedade e calcule a sua dimensão.
[1 v] (b) Indique um vector tangente a M, não nulo, no ponto $(1, 0, 1)$.
[2 v] (c) Determine o ponto de M mais próximo da origem.

[3 v] 2. Mostre que a equação
$$x^2 y + e^{x+y} = 0$$
define x como função de y, ou seja $x = g(y)$, numa vizinhança do ponto $(1, -1)$ e calcule $g'(-1)$.

3. Considere o campo vectorial
$$G(x, y, z) = \left(\sqrt{y^2 + z^2 - 4} + 2x\, e^{x^2+z}, \frac{yx}{\sqrt{y^2 + z^2 - 4}}, \frac{zx}{\sqrt{y^2 + z^2 - 4}} + e^{x^2+z} \right)$$
[1.5 v] (a) Mostre que G é gradiente no seu domínio de definição. Justifique a resposta.
[1.5 v] (b) Calcule o trabalho realizado pelo campo G ao longo do caminho $\alpha(t) = (t^{2020}, 2 + t^6, 2 + t^2)$, $t \in [0, 1]$. Justifique detalhadamente a resposta.

4. Considere a superfície
$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = \sqrt{x^2 + z^2}\ ;\ 1 < y < 2\right\}$$
orientada com a normal unitária $n = (n_x, n_y, n_z)$ tal que $n_y < 0$. Seja $F(x, y, z) = (-x, 2y, -z)$.

Calcule o fluxo $\int_S F \cdot n$:

[3 v] (a) pela definição;
[3 v] (b) usando o Teorema da Divergência.

[3 v] 5. Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um domínio regular. Sejam ϕ e ψ campos escalares definidos num aberto A (com $\bar{D} \subset A$), tais que $\phi, \psi \in C^2(A)$. Mostre que:
$$\int_D (\phi\, \Delta\psi + \nabla\phi \cdot \nabla\psi) = \int_{\partial D} \phi\, \nabla\psi \cdot n$$
onde n é a normal unitária exterior a ∂D e onde $\Delta\psi = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$.