Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 14 de Abril de 2012 - 9h - Versão 1
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) (a) Diga, justificadamente, se f é contínua na origem.

(1 val.) (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

2. Seja $g(x,y) = (\operatorname{sen} y + x^2, e^{x+y})$ e $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que

$$Dh(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é dada por $\sigma = h \circ g$,

(2 val.) (a) calcule $D\sigma(0,0)$;

(1 val.) (b) calcule a derivada de σ_2 no ponto $(0,0)$ segundo o vector $v = (1,1)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade de $f(x,y) = x^3 + y^2 - xy$.

4. Considere o conjunto definido por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + z < 2 \ ; \ z > y^2 \ ; \ 0 < x < 1 \ ; \ y > 0\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma: $\int(\int(\int dz)dx)dy$, e da forma $\int(\int(\int dy)dz)dx$.

(2 val.) b) Calcule o integral da função $f(x,y,z) = x$ em V.

(3 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o volume do conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2 \ ; \ z > x^2 + y^2 \ ; \ y > |x|\}.$$

(3 val.) 6. Seja I um intervalo compacto em $\mathbb{R}^n$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $\bar{x} \in I$ tal que

$$\int_I f(x)\, dx = f(\bar{x}) vol(I).$$