Teoremas de Lagrange e de Schwarz

João Teixeira, para CDI-II (MEAer, IST)

Março de 2018

Teorema (de Lagrange em $\mathbb{R}^n$). *Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ diferenciável em D e $a, b \in D$ tais que o segmento de recta que une a a b,*

$$\Gamma = \{a + t(b-a) : 0 \leq t \leq 1\},$$

está contido em D. Então existe $c \in \Gamma \setminus \{a, b\}$ tal que:

$$f(b) - f(a) = \nabla f(c) \cdot (b-a)$$

Demonstração. A função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(t) = f\big(a + t(b-a)\big),$$

é contínua no seu domínio. Além disso, para qualquer $t \in]0,1[$ e usando a diferenciabilidade de f nos pontos de Γ:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\big(a + t(b-a) + \Delta t(b-a)\big) - f\big(a + t(b-a)\big)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\nabla f\big(a + t(b-a)\big) \cdot \Delta t(b-a) + o\big(\Delta t(b-a)\big)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\nabla f\big(a + t(b-a)\big) \cdot \Delta t(b-a)}{\Delta t} + (b-a) \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o\big(\Delta t(b-a)\big)}{\Delta t(b-a)}}_{=0} \\ &= \nabla f\big(a + t(b-a)\big) \cdot (b-a) \end{aligned}$$

Assim sendo, g é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $]0,1[$, e a sua derivada é dada pela expressão anterior. Pelo teorema de Lagrange para funções reais de variável real, existe $\theta \in]0,1[$ tal que

$$f(b) - f(a) = g(1) - g(0) = g'(\theta) = \nabla f\big(a + \theta(b-a)\big) \cdot (b-a) = \nabla f(c) \cdot (b-a),$$

onde $c = a + \theta(b-a) \in \Gamma \setminus \{a, b\}$. $\square$

Teorema (de Schwarz). *Se D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}$ de classe C^2 em D então*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\,, \qquad \textit{para} \quad j,k = 1,2,\ldots,n. \tag{1}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, basta provar no caso $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. [1] Seja $(a,b) \in D$ e $r > 0$ tal que $B_r(a,b) \subset D$. Para aproximar ambas as derivadas parciais, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ consideramos a diferença incremental [2]:

$$\Delta(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) + f(a,b).$$

Para cada $h \neq 0$, considere a função:

$$\Psi(x,y) = f(x+h, y) - f(x,y).$$

Ora:

$$\begin{aligned} \Delta(h,k) &= f(a+h,b+k) - f(a,b+k) - f(a+h,b) + f(a,b) \\ &= \Psi(a, b+k) - \Psi(a,b). \end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Lagrange a Ψ no segmento de recta (vertical) que une (a,b) a $(a, b+a)$, existe $d \in]b, b+k[$ tal que

$$\begin{aligned} \Delta(h,k) &= \nabla\Psi(a,d) \cdot (0,k) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,d) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,d) \right) k \end{aligned}$$

Aplicando de novo o teorema de Lagrange, agora à função $\frac{\partial f}{\partial y}$ no segmento de recta (horizontal) que une (a,d) a $(a+h,d)$, existe $c \in]a, a+h[$ tal que:

$$\Delta(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c,d)\, hk \tag{2}$$

Note que (c,d) depende de (h,k), mas $(h,k) \to (0,0)$ implica $(c,d) \to (a,b)$.

Por seu turno, para cada $k \neq 0$ podemos considerar a função:

$$\varphi(x,y) = f(x, y+k) - f(x,y).$$

[1] Para provar (1), a dependência de f nas variáveis x_i, para i diferente de j e de k, é irrelevante. Por isso, para calcular as segundas derivadas parciais acima escritas num ponto $(a_1,\ldots,a_n) \in D$, podemos trabalhar com a função de duas variáveis reais:

$$f^*(x_j, x_k) = f(a_1, \ldots, a_{j-1},\, x_j\,, a_{j+1}, \ldots, a_{k-1},\, x_k\,, a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

[2] Deve fazer um esboço do rectângulo de vértices (a,b), $(a+h,b)$, $(a,b+k)$ e $(a+h,b+k)$ e verificar que $\lim_{k\to 0}\left(\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h,k)}{hk}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ e $\lim_{h\to 0}\left(\lim_{k\to 0} \frac{\Delta(h,k)}{hk}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$.

Escrevendo $\Delta(h,k)$ em termos de φ e aplicando o teorema de Lagrange a φ no segmento de recta (horizontal) que une (a,b) a $(a+h,b)$, existe $\tilde{c} \in]a, a+h[$ tal que:

$$\begin{aligned}\Delta(h,k) &= \varphi(a+h,b) - \varphi(a,b) \\ &= \nabla\varphi(\tilde{c},b)\cdot(h,0) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{c},b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{c},b)\right) h\end{aligned}$$

Aplicando uma última vez o teorema de Lagrange, agora à função $\frac{\partial f}{\partial x}$ no segmento de recta (vertical) que une $(\tilde{c},b)$ a $(\tilde{c},b+k)$, existe $\tilde{d} \in]b, b+k[$ tal que:

$$\Delta(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\tilde{c},\tilde{d})\, hk \tag{3}$$

Como anteriormente, $(h,k) \to (0,0)$ implica $(\tilde{c},\tilde{d}) \to (a,b)$.

Como $\Delta(h,k)$ é igual tanto ao segundo membro de (2) como ao de (3) então (para $h \neq 0$, $k \neq 0$ e $\|(h,k)\| < r$):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(c,d) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\tilde{c},\tilde{d})$$

Tomando, na igualdade anterior, o limite quando $(h,k) \to (0,0)$ e tendo em conta que as derivadas parciais de 2ª ordem de f são contínuas, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

$\square$