Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 11 de Junho de 2018 - 9h

Duração: 90 minutos

Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1, z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2\}$$

   (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

   (b) Determine o espaço tangente a M no ponto $(0, -1, 1)$.

   (c) Mostre que a equação $z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2$ define uma função $z(x, y)$ de classe C^1 num aberto em torno de cada ponto de M.

Resolução:

(a) A função $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - 1, z^5 + 2x^2z^3 + y^2z - 2)$ é de classe C^1 e $M = \{(x, y, z) \colon F(x, y, z) = (0, 0)\}$. A derivada de F é dada por

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 4xz^3 & 2yz & 5z^4 + 6x^2z^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

Uma vez que a primeira linha da matriz nunca se anula em M, a matriz tem característica 2 desde que a entrada (2,3) seja não nula. Como em M a coordenada z não se pode anular conclui-se que DF tem sempre característica 2 e portanto M é uma variedade de dimensão 1 em $\mathbb{R}^3$.

(b) O espaço tangente em $(0, -1, 1)$ é o núcleo da matriz

$$DF(0, -1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

portanto $T_{(0,-1,1)}M = \{(a, 0, 0) \colon a \in \mathbb{R}\}$. Equivalentemente, $T_{(0,-1,1)}M$ é o espaço gerado por $(0, -2, 0) \times (0, -2, 6) = (-12, 0, 0)$.

(c) Como $g(x, y, z) = z^5+2x^2z^3+y^2z-2$ é de classe C^1 o Teorema da Função Implícita garante que a equação determina uma função de $z(x, y)$ em torno dos pontos que satisfazem a equação $g = 0$ e verificam

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 5z^4 + 6x^2z^2 + y^2 \neq 0$$

Uma vez que $z(z^4 + 2x^2z^4 + y^2) = 2$, a coordenada z e portanto a função $\frac{\partial g}{\partial z}$ não se anulam em M o que demonstra a afirmação do enunciado.

2. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = z^2, 0 < z < 1\}$$

e o campo vetorial $H\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$H(x, y, z) = \Big(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, z(1 - z)\Big)$$

(a) Calcule a área de S.

(b) Calcule o fluxo de H através de S no sentido da normal unitária com componente z negativa.

(c) Determine se H é conservativo e, em caso afirmativo, calcule um potencial para H.

(d) Calcule o trabalho de H ao longo da curva definida pela intersecção de S com o plano definido por $x + 2y = 2$ do ponto $(0, 1, \frac{1}{2})$ ao ponto $(2, 0, 1)$.

Resolução:

(a) Em coordenadas cilíndricas em torno do eixo dos zz temos

$$S = \{(\rho, \theta, z) \colon \frac{\rho^2}{4} = z^2, 0 < z < 1\}$$

Como z é positivo, $\frac{\rho^2}{4} = z^2 \Leftrightarrow z = \frac{\rho}{2}$ e uma parametrização de S é dada por

$$g(\rho, \theta) = \Big(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta, \frac{\rho}{2}\Big), \quad 0 < \rho < 2,\ 0 < \theta < 2\pi$$

Temos

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto

$$Dg^T Dg = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}$$

e a área é dada por

$$\int_S 1 = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{\det Dg^T(\rho, \theta) Dg(\rho, \theta)}\, d\rho d\theta = 2\pi \int_0^2 \sqrt{\frac{5}{4}} \rho d\rho = 2\pi\sqrt{5}.$$

(b) Podemos aplicar o Teorema da divergência ao cone sólido

$$V = \{(x, y, z) \colon \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} < z^2, 0 < z < 1\}$$

A fronteira de V é $\partial V = S \cup D$ em que $D = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 4\}$. O Teorema da divergência diz que

$$\int_V \operatorname{div} \vec{H} = \int_{\partial V} H \cdot n^{ext} = \int_S H \cdot n + \int_D H \cdot (0, 0, 1)$$

(uma vez que normal a S dada é a normal exterior ao cone e, em D, a normal unitária exterior a V é o campo vetorial constante igual a $(0, 0, 1)$). A divergência de H é

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z(1-z)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - 2z = 2 - 2z$$

enquanto que $H \cdot (0, 0, 1) = z(1 - z) = 0$ em D. Portanto

$$\begin{aligned}
\int_S H \cdot n &= \int_V 2 - 2z \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2z} (2 - 2z) \rho d\rho dz d\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 4z^2 - 4z^3 dz = \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

(c) O campo é conservativo porque $\phi(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}$ é claramente um potencial para H.

(d) Utilizando o teorema fundamental do Cálculo, o trabalho é dado por $\phi(2, 0, 1) - \phi\left(0, 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

3. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z\sqrt{x^2 + y^2} = 1, x > 0, 1 < z < 2\}$$

e o campo vetorial $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido pela expressão

$$F(x, y, z) = (yz, -xz + x^2 y, 0)$$

(a) Calcule o fluxo de $\operatorname{rot} F$ através de S no sentido da normal unitária com terceira componente negativa.

(b) Dê um exemplo de um campo vetorial de classe C^1, não nulo, $G \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que o trabalho realizado por G ao longo do bordo de S seja nulo.

Resolução:

(a) S é uma porção de um hiperbolóide de revolução cuja equação em coordenadas cilíndricas é

$$z = \frac{1}{\rho}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 1 < z < 2$$

O bordo de S é a união das duas semi-circunferências

$$C_1 = \{(x,y,1)\colon x^2+y^2=1, x\geq 0\} \qquad C_2 = \{(x,y,2)\colon x^2+y^2=\tfrac{1}{4}\}$$

e dos dois arcos de hipérbole

$$C_3 = \{(0,y,-\tfrac{1}{y})\colon \ -1\leq y\leq -\tfrac{1}{2}\} \qquad C_4 = \{(0,y,\tfrac{1}{y})\colon \tfrac{1}{2}\leq y\leq 1\}$$

O Teorema de Stokes diz que o fluxo de $\operatorname{rot} F$ ao longo de S no sentido da normal dada é igual ao trabalho de F ao longo do bordo com C_1 percorrida no sentido horário e C_2 no sentido anti-horário quando vistas de muito acima do plano xy. Note-se que

$$F(0,y,z) = (yz,0,0)$$

é perpendicular ao plano yz pelo que o trabalho realizado por F ao longo de C_3 e C_4 é nulo. Podemos parametrizar C_1 e C_2 respetivamente por

$$g_1(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1), \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

e

$$g_2(\theta) = \left(\frac{\cos\theta}{2}, \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}, 2\right), -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

sendo que a parametrização g_1 percorre C_1 no sentido contrário ao pretendido. Conclui-se assim que

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot} F\cdot n &= \int_{\partial S} F \\
&= \int_{C_1} F\cdot n + \int_{C_2} F\cdot n \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,1)\cdot(-\operatorname{sen}\theta,\cos\theta,0)d\theta \\
&\quad + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F\left(\frac{\cos\theta}{2},\frac{\operatorname{sen}\theta}{2},2\right)\cdot\left(\frac{-\operatorname{sen}\theta}{2},\frac{\cos\theta}{2},0\right)d\theta \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta+\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta,0)\cdot(-\operatorname{sen}\theta,\cos\theta,0)d\theta \\
&\quad + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta+\frac{1}{8}\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta,0\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta,\frac{1}{2}\cos\theta,0\right)d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta-\cos^3\theta\operatorname{sen}\theta d\theta \\
&\quad + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta-\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{16}\cos^3\theta\operatorname{sen}\theta d\theta \\
&= \pi-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(b) O bordo de S é uma curva fechada, logo qualquer campo gradiente realiza trabalho nulo ao longo de ∂S. Podemos tomar por exemplo o campo vetorial constante $G(x,y,z) = \nabla(x) = (1,0,0)$.

4. Mostre que a equação $z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2$ define uma função $z(x,y)$ de classe C^1 num aberto que contém a circunferência $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ e calcule o máximo dessa função sobre a circunferência.

   Sugestão: Use a alínea 1(c) e note que, para cada (x,y), a função $g_{x,y}(z) = z^5 + 2x^2z^3 + y^2z$ é crescente.

   Resolução: Uma vez que a função $g_{x,y}$ da sugestão é crescente (pois $g'_{x,y}(z) = 5z^4 + 6x^2z^2 + y^2$ é maior ou igual a zero e anula-se quando muito em $z = 0$), a equação $g_{x,y}(z) = 2$ tem exatamente uma solução para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e em particular para pontos na circunferência. Portanto a equação $g(x,y,z) = z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2$ define globalmente uma função $z(x,y)$ em $\mathbb{R}^2$. A alínea 1(c) garante que esta função é de classe C^1 num aberto contendo cada ponto da circunferência e portanto num aberto contendo a circunferência.

   O Teorema de Weierstrass garante a existência de um máximo e mínimo de $z(x,y)$ na circunferência uma vez que $z(x,y)$ é contínua e a circunferência é um compacto. Nos pontos de extremo, $\nabla z(x,y)$ deve pertencer ao espaço normal à circunferência, que é gerado (por exemplo) pelo vector $2(x,y)$; ou seja, para algum $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2\hat{\lambda}(x,y).$$

   Uma vez que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}$$

   a condição de extremos condicionados é equivalente a

$$\left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \underbrace{\hat{\lambda}\frac{\partial g}{\partial z}}_{\stackrel{\text{def}}{=}\lambda} 2(x,y) = \lambda(2x,2y) \quad \Leftrightarrow \quad \left(-4xz^3, -2yz\right) = \lambda(2x,2y).$$

   Resulta então o seguinte sistema[1] para as coordenadas dos pontos de estacionaridade do problema de extremos condicionados à circunferência $x^2 + y^2 = 1$:

$$\begin{cases} 2x(\lambda + 2z^3) = 0 \\ y(\lambda + z) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \\ z^5 + z = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \\ z^5 + 2z^3 = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2z^3 - z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z(z^4 + 2x^2z^2 + y^2) = 2 \end{cases}$$

[1] A equação $z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2$ foi acrescentada por ser a definição (implicita) de $z = z(x,y)$

O último sistema acima não tem soluções, pois $z = 0$ contradiz a 3ª equação e substituindo $2z^2 = 1$ na 3ª equação resulta $x^2 + y^2 = \pm 2\sqrt{2} - 1/4 \neq 1$.

Temos pois quatro pontos candidatos a pontos de extremo: $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$.

Nos pontos $(\pm 1, 0)$ temos $z^5 + 2z^3 = 2$. Como $\varphi(z) = z^5 + 2z^3$ é crescente e $\varphi(1) = 3 > 2$, resulta que o único $z \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(z) = 2$ é menor que 1; assim $z(\pm 1, 0) < 1$.

Nos pontos $(0, \pm 1)$ temos $z^5 + z = 2$, cuja única solução é $z = 1$ ($\psi(z) = z^5 + z$ é crescente, pelo que $\psi(z) = 2$ tem uma única solução). Assim sendo, $z(0, \pm 1) = 1$. Conclui-se que o máximo de $z(x, y)$ sobre a circunferência é 1.