Cálculo Diferencial e Integral II

Resolução do Teste 1 (versão 1) - 21 de Abril de 2018 - 9h

Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

1. Sejam

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^5}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x,y) = \cos(\pi - x^2 + xy).$$

(a) Determine $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, caso exista.

(b) Sendo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $F = (f,g)$, calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

(c) Caso exista, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

(d) Dada uma função diferenciável $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $h(1,1) = (0,1)$ e $Dh(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, calcule $D(g \circ h)(1,1)$.

Resolução:

(a) Uma vez que

$$\frac{x^4+y^5}{x^2+y^4} = \frac{x^4}{x^2+y^4} + \frac{y^5}{x^2+y^4} = x^2\frac{x^2}{x^2+y^4} + y\frac{y^4}{x^2+y^4}$$

e as fracções na expressão anterior são números compreendidos entre 0 e 1, cada termo na soma tende para 0 quando $(x,y) \to (0,0)$. Logo o limite em causa existe e é igual a 0.

(b) Uma vez que os limites se calculam componente a componente temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \right) = (0, g(0,0)) = (0,-1)$$

(onde para calcular o limite de g usámos o facto que g é uma função contínua [é a composta da função coseno com um polinómio]).

(c) Uma vez que

$$f(x,0) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

vemos que $f(x,0) = x^2$. Logo $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx}\left(x^2\right)_{|x=0} = 2 \cdot 0 = 0$.

(d) A função g é diferenciável, porque é de classe C^1 e

$$Dg(x,y) = \left[\begin{array}{cc} (2x-y)\operatorname{sen}(\pi - x^2 + xy) & -x\operatorname{sen}(\pi - x^2 + xy) \end{array} \right]$$

Pela regra da derivação da função composta conclui-se que

$$\begin{aligned} D(g \circ h)(1,1) &= Dg(h(1,1))Dh(1,1) = Dg(0,1)Dh(1,1) \\ &= \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

2. Sejam $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y + 3$ e $g(x,y) = x^4 + y^4 + 2$.

(a) Classifique os pontos críticos de f em $\mathbb{R}^2$.

(b) Justifique que $(0,0)$ é um ponto crítico de g em $\mathbb{R}^2$ e classifique este ponto.

Resolução:

(a) Como $\nabla f(x,y) = (2x-2y, -2x+2)$ os pontos críticos são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

A matrix Hessiana de f é dada por

$$Hf(x,y) = \left[\begin{array}{cc} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{array} \right]$$

Uma vez que $\det Hf(1,1) = -4 < 0$ conclui-se que $(1,1)$ é um ponto de sela.

(b) Temos $\nabla g(x,y) = (4x^3, 4y^3)$. Portanto $\nabla g(0,0) = (0,0)$ o que significa que $(0,0)$ é um ponto crítico. Uma vez que $x^4 + y^4 \geq 0$ para todos os x, y temos $g(x,y) \geq g(0,0)$ para todos os $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ logo $(0,0)$ é um ponto de mínimo (absoluto) de g.

3. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\,;\; z + x \leq 2\,;\; z - x \leq 2\,;\; z \geq 0\}.$$

(a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

(b) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

Resolução:

(a) O volume de A é por definição dado por $\mathrm{vol}(A) = \int_A 1$. Para cada (x,y) na projecção do sólido no plano xy temos que $z \geq 0, z \leq 2+x$ e $z \leq 2-x$. Portanto

$$0 \leq z \leq \min\{2+x, 2-x\} = 2-|x|$$

A projecção está claramente contida no círculo $\{(x,y)\colon x^2+y^2 \leq 1\}$. Como para cada um dos pontos do círculo a condição em z é não vazia, a projecção consiste exatamente no círculo de raio 1 centrado na origem no plano xy. Pelo Teorema de Fubini o volume é portanto dado pela expressão

$$\int\int_{\{(x,y)\colon x^2+y^2\leq 1\}} \left(\int_0^{2-|x|} 1dz\right) dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{2-|x|} 1dzdxdy$$

(b) De acordo com a alínea anterior, no sólido A, a coordenada z varia entre 0 e 2 (isto também é uma consequência das condições $0 \leq z \leq 2-|x|$). Para cada z fixo entre 0 e 2 a fatia horizontal correspondente de A é definida pelas condições

$$x^2+y^2 \leq 1, \quad z-2 \leq x \leq z+2$$

e trata-se portanto da região do círculo compreendida entre as retas verticais $x = z-2$ e $x = 2-z$ no plano xy. Se $z > 1$ estas retas não intersetam o círculo e portanto a segunda condição é implicada pela primeira. Temos assim

$$\mathrm{vol}(A) = \int_0^1\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1dydxdz + \int_1^2\int_{z-2}^{2-z}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1dydxdz$$

4. Calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \leq 6-\sqrt{x^2+y^2}\,;\ x \geq 0\,;\ y \geq 0\}.$$

Resolução: Usando coordenadas cilíndricas em torno do eixo dos zz

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

o sólido é determinado pelas condições

$$r^2 \leq z \leq 6-r, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Uma vez que

$$r^2 = 6-r \Leftrightarrow r = 2 \quad (\text{ pois } r > 0)$$

temos que

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(B) &= \int\int\int 1dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\int_{r^2}^{6-r} rdzdrd\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^2 (6-r-r^2)rdr = \frac{\pi}{2}\cdot(12-\frac{8}{3}-\frac{16}{4}) = \frac{8\pi}{3}\end{aligned}$$

5. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabendo que existe $R>0$ tal que

$$x^2+y^2<R^2 \quad \text{implica} \quad \nabla f(x,y)\cdot(x,y)>0,$$

mostre que $(0,0)$ é ponto de mínimo de f.

Resolução: Dado (x,y) tal que $0<x^2+y^2<R^2$ considere-se a função $g\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(t)=f(tx,ty)$$

Esta função é diferenciável pela regra de derivação da função composta e portanto, pelo Teorema de Lagrange,

$$f(x,y)-f(0,0)=g(1)-g(0)=g'(c)\cdot(1-0)=g'(c)$$

para algum $c\in]0,1[$. Mas pela regra de derivação da função composta

$$g'(t)=\nabla g(tx,ty)\cdot(x,y)$$

Assim, a condição do enunciado relativa ao gradiente diz-nos que

$$g'(c)=\frac{1}{c}\nabla g(cx,cy)\cdot(cx,cy)>0$$

Conclui-se que $f(x,y)>f(0,0)$ para todo o (x,y) tal que $0<x^2+y^2<R^2$. Portanto $(0,0)$ é um mínimo relativo (estrito) de f.