Cálculo Diferencial e Integral II

Resolução do Teste 1 (versão 1) - 21 de Abril de 2018 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

1. Seja

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+4y^6}{3x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Calcule, ou mostre que não existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.

   (b) Calcule $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$, caso exista.

   Resolução:

   (a) Uma vez que

$$\frac{2x^3+4y^6}{3x^2+y^4} = \frac{2x^3}{3x^2+y^4} + \frac{4y^6}{3x^2+y^4} = \frac{2}{3}x\frac{3x^2}{3x^2+y^4} + 4y^2\frac{y^4}{3x^2+y^4}$$

   e as fracções na expressão anterior são números compreendidos entre 0 e 1, cada termo na soma tende para 0 quando $(x,y) \to (0,0)$. Logo o limite em causa existe e é igual a 0.

   (b) Uma vez que $g(0,y) = 4y^2$ (mesmo quando $y=0$), temos $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy}\left(g(0,y)\right)_{|y=0} = 8 \cdot 0 = 0$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $\phi(x,y) = f(x+y, 3x+y)$. Calcule $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,y)$ em termos das derivadas parciais de f.

   Resolução: Escrevendo $f = f(u,v)$, pela regra da cadeia temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(x+y,3x+y)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x+y,3x+y)\cdot 3$$

   e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(x+y,3x+y) + 3\frac{\partial f}{\partial v}(x+y,3x+y)\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x+y,3x+y)\cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(x+y,3x+y)\cdot 3 + \\ &\quad +3\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(x+y,3x+y)\cdot 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x+y,3x+y)\cdot 3\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x+y,3x+y) + 6\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(x+y,3x+y) + 9\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x+y,3x+y) \end{aligned}$$

onde usámos o lema de Schwarz para simplificar a expressão, o que podemos fazer porque f é de classe C^2.

3. Dadas $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y$ e $g(x,y) = y^5 - y^3x$.

   (a) Classifique os pontos críticos de f em $\mathbb{R}^2$.

   (b) Justifique que $(0,0)$ é um ponto crítico de g em $\mathbb{R}^2$ e classifique este ponto.

   Resolução:

   (a) Temos $\nabla f(x,y) = (2x+2xy, 2y+x^2)$ logo os pontos críticos de f são as soluções do sistema

   $$\begin{cases} x + xy = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1+y) = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = -1 \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases}$$

   que são $(0,0)$ e $(\pm\sqrt{2}, -1)$. A matriz Hessiana de f é

   $$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2+2y & 2x \\ 2x & 2 \end{bmatrix}$$

   Uma vez que $Hf(0,0) = 2\,\mathrm{Id}$, tem valores próprios positivos (iguais a 2) conclui-se que $(0,0)$ é um ponto de mínimo. Como $\det Hf(\pm\sqrt{2}, -1) = -8 < 0$ conclui-se que ambos os pontos $(\pm\sqrt{2}, -1)$ são pontos de sela.

   (b) Temos que $\nabla g(x,y) = (-y^3, 5y^4 - 3y^2x)$ logo $\nabla g(0,0) = (0,0)$ e $(0,0)$ é um ponto crítico. Uma vez que $g(0,y) = y^5$ não tem um máximo nem um mínimo em $y = 0$ ($g(0,y) > g(0,0) = 0$ para $y > 0$ e $g(0,y) < g(0,0)$ para $y < 0$)), conclui-se que $(0,0)$ é um ponto de sela de g.

4. Considere o conjunto

   $$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\,;\, x + z \leq 2\,;\, x + z \geq -2\}.$$

   (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

   (b) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

   Resolução:

(a) O volume de A é dado por $\int_A 1$. A projeção do sólido A no plano xy é o círculo definido pela condição $x^2 + y^2 \leq 1$ e para cada (x, y) nesse círculo os pontos do sólido são os que satisfazem a condição $2 - x \leq z \leq 2 + x$ logo, pelo Teorema de Fubini

$$\operatorname{vol}(A) = \int\int_{\{(x,y):\, x^2+y^2=1\}} \left(\int_{2-x}^{2+x} 1 \, dz \right) dxdy = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{2-x}^{2+x} 1 \, dzdydx$$

(b) As condições $-2 - x \leq z \leq 2 + x$ juntamente com o facto de x variar entre -1 e 1 mostram que, no sólido A, a coordenada z varia entre $-2 - 1 = -3$ e $2 + 1 = 3$. Para cada $z \in [-3, 3]$ a fatia horizontal de A é a porção do círculo definido pela condição $x^2 + y^2 \leq 1$ que satisfaz $-2 - z \leq x \leq 2 - z$ (ou seja que está entre as duas retas verticais com abcissas $-2 - z$ e $2 - z$ respetivamente).

Para pontos do círculo, a condição $x \geq -2-z$ é automática quando $-2-z \leq -1 \Leftrightarrow z \geq -1$ e, analogamente, a condição $x \leq 2-z$ é automática se $2-z \geq 1 \Leftrightarrow z \leq 1$. Temos assim três casos consoante $z \leq -1, z \in [-1, 1]$ ou $z \geq 1$, e obtemos a seguinte expressão para o volumel:

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(A) &= \int_{-3}^{-1} \int_{-2-z}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dydxdz + \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dydxdz \\ &\quad + \int_{1}^{3} \int_{-1}^{2-z} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dydxdz \end{aligned}$$

5. Calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 + \sqrt{x^2 + y^2} \,;\, x^2 + y^2 \leq 1 \,;\, x \geq 0 \,;\, y \geq 0\}.$$

Resolução: Usando coordenadas cilíndricas em torno do eixo dos zz

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \\ z = z \end{cases}$$

o sólido é determinado pelas condições

$$1 - r \leq z \leq 1 + r, \quad r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

logo

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(B) &= \int_B 1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_{1-r}^{1+r} r dz dr d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r(1 + r - (1 - r)) dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 2r^2 dr = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

6. Dados

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{e} \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável no interior de D tal que a restrição de f a C é constante. Seja $\gamma : [0, 1] \to D$ um caminho de classe C^1 tal que $\gamma([0, 1]) \cap C = \{\gamma(0), \gamma(1)\}$. Mostre que existe $t_0 \in]0, 1[$ tal que $\gamma'(t_0)$ é ortogonal ao gradiente de f em $\gamma(t_0)$.

Resolução: Considere-se a função $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = f(\gamma(t))$. Então f é contínua (porque é a composta de funções contínuas) e toma os mesmos valores em $t = 0$ e $t = 1$ (nomeadamente, o valor que f assume em C). Pelo Teorema de Weierstrass, g tem um máximo e mínimo em $[0, 1]$ e uma vez que $g(0) = g(1)$ um desses extremos tem que ser atingido num ponto $t_0 \in]0, 1[$ (mesmo no caso tonto em que g é constante e o máximo e o mínimo coincidam). Pela regra de derivação da função composta, g é diferenciável em t_0 (pois $\gamma(t_0)$ está necessariamente no interior de D) e

$$g'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$$

Como t_0 é um ponto de extremo de g, temos que $g'(t_0) = 0$ e a igualdade anterior diz então que $\gamma'(t_0)$ é ortogonal ao gradiente em $\gamma(t_0)$.