Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exercícios de Auto-Avaliação
(Integrais em Variedades)

1. Calcule a massa do fio descrito por

$$C = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,;\, z = xy\,;\, x > 0\}$$

e com densidade de massa $\sigma(x,y,z) = \sqrt{1 + (x^2 - y^2)^2}$.

2. Calcule a coordenada $\overline{x}$ do centro de massa do fio descrito pelo caminho

$$g(t) = (t \operatorname{sen} t, t \cos t, t)\,; \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

e cuja densidade de massa é a função $\sigma(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{2 + z^2}}$.

3. Calcule a área da superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\,;\, x > 0\,;\, y > 0\,;\, z < 1\}$.

4. Calcule o momento de inércia, relativo ao eixo Oy, da superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1 + y^2\ ;\ 0 < y < 3\},$$

cuja densidade de massa é a função $\sigma(x,y,z) = \dfrac{y}{\sqrt{1 + 2y^2}}$.

5. Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial $G(x,y) = (\operatorname{sen}(x^2), \cos(y^2) + x)$ ao longo da elipse dada pela equação $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e percorrida no sentido horário.

6. Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x,y,z) = (-y, x, z)$ através da superfície dada por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\ ;\ 0 < x < 1\ ;\ 0 < y < 1\},$$

segundo a normal ν com terceira componente positiva.

7. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1 + y^2\ ;\ 0 < y < 3\}.$$

orientada com a normal ν tal que $\nu_y < 0$.

a) Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x,y,z) = (-x, y, z)$ através de S no sentido da normal ν, usando o teorema de Gauss.

b) Calcule o fluxo do campo vectorial $G(x,y,z) = (zy, x, xy)$ através de S no sentido da normal ν, usando o teorema de Stokes.

8. Calcule o fluxo do rotacional do campo $F(x, yz) = (x, -xz, yz)$ através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = 1 - x^2 - y^2\}$$

segundo a normal com terceira componente positiva.

9. Calcule o trabalho do campo vectorial

$$F(x, y, z) = \left(x\,,\ \frac{z}{y^2 + z^2} + y\,,\ -\frac{y}{y^2 + z^2} + z\right),$$

ao longo das linhas seguintes segundo sentidos à sua escolha:

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 0\ ;\ x^2 + (y - 2)^2 = 1\}$.

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = 1\ ;\ |y| + |z| = 2\}$.