Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exercícios de Auto-Avaliação
(Teorema de Fubini. Mudança de Variáveis)

1. Considere o conjunto
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z < 2\,;\ 0 < x < 1\,;\ y > 0\,;\ z > 0\}.$$
   (a) Escreva expressões para o volume de V em termos de integrais iterados das duas formas seguintes: $\int(\int(\int dz)dy)dx$; $\int(\int(\int dx)dy)dz$.
   (b) Calcule o volume de V.

2. Considere o conjunto
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < x^2+y^2-1\ ;\ 0 < x < 1\ ;\ 0 < y < 1\}.$$
Escreva expressões para o volume de V em termos de integrais iterados das duas formas seguintes: $\int(\int(\int dz)dy)dx$; $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

3. Calcule o integral $\displaystyle\iiint_D f$ em que $f(x,y,z) = 2z$ e D é o conjunto definido por
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z < 1\ ;\ x+z < 1\ ;\ x > 0\ ;\ y > 0\ ;\ z > 0\}.$$

4. Determine a coordenada y do centro de massa do sólido representado pelo conjunto
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < x+y-1\ ;\ 0 < x < 1\ ;\ 0 < y < 1\},$$
cuja densidade de massa é constante e igual a um.

5. Use a mudança de variáveis $u = x+y\,;\ v = y-x^3$ para calcular a massa do conjunto
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x+y < 2\,;\ 0 < y-x^3 < 1\},$$
cuja densidade de massa é a função $\sigma(x,y) = 1+3x^2$.

6. Calcule, em coordenadas cilíndricas, o momento de inércia relativo ao eixo Oy do sólido
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 1-x^2-z^2\},$$
cuja densidade de massa é constante e igual a um.

7. Calcule, em coordenadas cilíndricas, o momento de inércia relativo ao eixo Oz do sólido
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1\,;\ 0 < z < 1+x^2+y^2\,;\ y > 0\},$$
cuja densidade de massa é constante e igual a um.

8. Calcule o volume do conjunto
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\ ;\ y > \sqrt{x^2+z^2}\}.$$