

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 9

(Variedades. Espaço Tangente. Espaço Normal)

1. Mostre que cada um dos conjuntos seguintes é uma variedade, determine a respectiva dimensão e descreva-o parametricamente:

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3; -\infty < x < +\infty\}$.
- b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 1\}$.
- c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1; y > 0; z > 0; |x| < 1\}$.
- d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z < 1\}$.
- e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 1; z > 0; x > 0; y > 0\}$.
- f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1; z > 0; y > |x|\}$.
- g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = y^2 + 1; |y| < 1; x > 0\}$.
- h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 < 1; x + y = 1; x > 0; y > 0\}$.

2. Determine o espaço tangente e o espaço normal à variedade

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x = y\}$$

no ponto $(1, 1, 2)$.

3. Determine o espaço tangente e o espaço normal à variedade

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1\},$$

no ponto $(0, 1, 0)$.

4. Determine a recta tangente e o plano normal à linha definida por

$$\{(\cos t, \sin t, \sin(2t)); t \in \mathbb{R}\},$$

no ponto $(1, 0, 0)$.

5. Determine a recta normal e o plano tangente à superfície definida por

$$\{(x, y, xy); x, y \in \mathbb{R}\},$$

no ponto $(1, 1, 1)$.