Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 8

(Função Inversa. Função Implícita)

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x = 0\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = \left(xy, \dfrac{y}{x}\right)$.

   a) Mostre que f não é injectiva.

   b) Determine um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ em que f é injectiva.

   c) Mostre que f tem inversa local em torno do ponto $(2,2)$.

   d) Calcule $Df^{-1}(4,1)$, em que f^{-1} designa uma das funções inversas de f.

2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} u &= \quad x + y + \operatorname{sen}(x-y) \\ v &= \quad 1 + \log(1+xy) - x. \end{cases}$$

   Mostre que existe uma vizinhança de $(u,v) = (2, \log 2)$ e uma vizinhança de $(x,y) = (1,1)$ em que o sistema define (x,y) como função, de classe C^1, de (u,v) e calcule $\dfrac{\partial y}{\partial v}(2, \log 2)$.

3. Mostre que a equação $y \operatorname{sen}(x+y) = 0$ define, implicitamente, x como função de y em alguma vizinhança do ponto $(0,\pi)$ e calcule a derivada $\dfrac{dx}{dy}(\pi)$. Confirme o resultado explicitando x como função de y.

4. Mostre que a equação $2z + x^2z^5 + y^2x^3 + xy = 2$ define implicitamente z como função de x e de y, em torno do ponto $(0,0,1)$. Calcule a derivada $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0,0)$.

5. Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ definido pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 + 1 \\ y^2 + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} z = 1. \end{cases}$$

   a) Mostre que numa vizinhança do ponto $(0,1,0)$, o conjunto S é o gráfico de uma função $f : I \to \mathbb{R}^2$, em que I é um intervalo aberto em $\mathbb{R}$, ou seja, duas das variáveis são funções da terceira.

   b) Calcule $f'(0)$.

6. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e suponhamos que a equação $F(x,y,z) = 0$ determina cada uma das variáveis como função, de classe C^1, das restantes, ou seja,

$$x = x(y,z) \; ; \; y = y(x,z) \; ; \; z = z(x,y).$$

   Mostre que se tem

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) = -1$$