

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 7

(Mudança de Variáveis de Integração. Regra de Leibniz)

1. Escreva o integral $\int \int_S f(x, y) dx dy$ em coordenadas polares considerando as seguintes regiões S .

- (a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x > |y|\}$.
(b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y > x\}$.
(c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq x\}$.

2. Utilizando coordenadas polares (possivelmente modificadas), calcule

- (a) $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2} dy \right) dx$.
(b) $\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dy \right) dx$.
(c) $\int \int_U (x^2 + y^2 - 1) dx dy$, sendo $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \leq 1; y > 0\}$.
(d) $\int \int_S \sin((x-1)^2 + y^2) dx dy$, sendo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\}$.
(e) A área da região $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1; x > |y|\}$.

3. Considere a transformação de coordenadas definida por

$$x = 2u + v, \quad y = u^2 - v.$$

- (a) Sendo T o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 2)$ no plano uv , determine a imagem de T no plano xy pela transformação de coordenadas.
(b) Sendo S o conjunto determinado na alínea anterior, calcule $\int \int_S \frac{1}{\sqrt{x+y+1}} dx dy$.

4. Considere o conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x + y < 2; 0 < x < y\},$$

e seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (y^2 - x^2) \cos(x + y)^4$. Calcule $\int_D f$ utilizando uma transformação de coordenadas apropriada. Justifique cuidadosamente.

5. Use coordenadas cilíndricas ou coordenadas esféricas para exprimir o volume de cada uma das seguintes regiões em termos de um só integral iterado:

- (a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < \sqrt{2-x^2-y^2}\}$.
(b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z > \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

6. Calcule o momento de inércia do sólido

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1; 0 \leq x \leq (y^2 + z^2)^{\frac{1}{4}}; y \geq 0; z \geq 0\},$$

relativamente ao eixo Ox , e cuja densidade de massa é dada por $\sigma(x, y, z) = x(y^2 + z^2)$.

7. Calcule o volume de cada uma das regiões:

- (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 - (\sqrt{y^2 + z^2} - 1)^2; y \geq 0; z \geq 0\}$
(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 < 1; y \geq 0; z > 0\}$.

8. Calcule $F'(0)$ onde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida pela expressão

$$F(t) = \int_0^1 \operatorname{sen}(tx^2 + x^3) dx.$$

9. Sendo $V_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq t ; 0 \leq z \leq 1 ; y > 0\}$ e $F : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(t) = \int \int \int_{V_t} \frac{e^{t(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} dx dy dz,$$

calcule $F'(4)$.