TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 3

(Diferenciabilidade)

1. Calcule as derivadas parciais de cada uma das funções seguintes:

   a) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$

   b) $g(x,y) = \dfrac{y}{x}$

2. Calcule as derivadas parciais na origem da função: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^4+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. Calcule a matriz Jacobiana de cada uma das funções seguintes:

   a) $f(x,y) = (xy, \log(xy))$

   b) $g(x,y,z) = (\sqrt{xy}, e^{yz})$

   c) $h(x,y,z) = (y^2, xz-y, z+xy)$

   d) $\phi(x,y,z) = y^2 - xyz + 2z$

   e) $\gamma(t) = (t^3, e^{-t}, \dfrac{1}{t})$

4. Calcule as derivadas de cada uma das funções seguintes no ponto P e segundo o vector **v** indicados:

   a) $f(x,y) = y^x$; $P = (2,1)$; $\mathbf{v} = (1,1)$

   b) $g(x,y,z) = e^z + xy$; $P = (1,1,1)$; $\mathbf{v} = (1,-1,1)$

5. Determine um vector segundo o qual a derivada da função $f(x,y) = x(y^2+xy)$, no ponto $(1,2)$ é nula.

6. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$ é diferenciável na origem e calcule a respectiva derivada.

7. Considere as funções:

   i) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   ii) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   iii) $h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Qual destas funções é diferenciável na origem? Justifique.

8. Considere a função: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   a) Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(0,1)$.

   b) Calcule a derivada de f no ponto $(0,1)$ segundo o vector $(2,1)$.

   c) Calcule a derivada de f no ponto $(0,0)$ segundo o vector $(2,3)$.