TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 13

(Teorema da Divergência. Teorema de Stokes)

1. Sendo $F(x,y,z) = (y, -x, \cos(x^2+z^2))$, calcule o fluxo de $\nabla \times F$ através da superfície
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = x^2+y^2-1 < 3\}$$
no sentido da normal com terceira componente negativa.

2. Usando o teorema de Stokes, calcule o trabalho realizado pelo campo $G(x,y,z) = (x, -z, y+z^2)$, ao longo da linha definida pelas equações $x^2+z^2 = 1\,;\ y+z = 1$ e orientada no sentido horário quando vista do ponto $(0,100,0)$.

3. Usando o teorema de Stokes, calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial
$$H(x,y,z) = (x^2-y, y^2-x, y^2-x^2+z^3)$$
ao longo do caminho
$$g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos 2t)\,; \quad t \in [0, 2\pi].$$

4. Considere a superfície
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\,;\ z > 0\},$$
orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$. Seja $G(x,y,z) = (xz, yz, 1-z^2)$. Calcule o fluxo $\int_S G \cdot n$:
   a) Pelo teorema da divergência.
   b) Pelo teorema de Stokes.

5. Considere a superfície
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 = 1\,;\ x > 0\},$$
orientada com a normal unitária n à sua escolha. Seja $F(x,y,z) = (1, 2z, 2xy)$. Calcule o fluxo $\int_S F \cdot n$:
   a) Pelo teorema da divergência.
   b) Pelo teorema de Stokes.

6. Considere o campo vectorial
$$H(x,y,z) = \left(\frac{z}{x^2+z^2} + x, y, \frac{-x}{x^2+z^2} + z \right).$$
   a) Calcule o trabalho de H ao longo da elipse definida por $2(x-1)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, $z = 0$, percorrida no sentido horário para um observador colocado no ponto $(1,0,100)$.
   b) Calcule o trabalho de H ao longo da linha definida por $x^2+z^2 = 2$, $y+z = 1$, percorrida num sentido à sua escolha.
   c) Será H um gradiente no seu domínio?