Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 10

(Extremos condicionados. Integrais de Campos Escalares em Variedades)

1. Para cada um dos casos seguintes, determine os extremos da função f no conjunto S:

   a) $f(x,y,z) = x + y + z, \qquad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 3\}.$

   b) $f(x,y,z) = z, \qquad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 4 \,;\, x + z = 1\}.$

2. Use o Método dos Multiplicadores de Lagrange para determinar os extremos absolutos da função $f(x,y,z) = z^2 - x - y$ que se encontram na bola $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

3. Determine as dimensões da caixa rectangular com volume igual a $1 \ \mathrm{m}^3$ que minimizam a respectiva área.

4. Determine os pontos da linha $\{(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(2t)) \,;\, t \in \mathbb{R}\}$ mais afastados da origem.

5. Determine a massa total do fio $\{(t^2, t\cos t, t \operatorname{sen} t) \,;\, 0 \leq t \leq 2\pi\}$, com densidade de massa por unidade de comprimento $\sigma(x,y,z) = \sqrt{x}$.

6. Calcule o centróide da linha descrita pelas equações $x = y^2 + z^2 \,;\, x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

7. Calcule a área de cada uma das superfícies:

   a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + \sqrt{x^2 + z^2} = y < 2 \,;\, x > 0\}$.

   b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy \,;\, x^2 + y^2 < 1\}$.

8. Considere a superficíe

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \,;\, z > 0\}, \; a > 0,$$

   com densidade de massa igual a um. Calcule o momento de inércia de S relativo ao eixo Oz.