Cálculo Diferencial e Integral II — Lista de exercícios extra das aulas práticas e das aulas de revisão para o Teste 1

Limites, Continuidade e Diferenciabilidade

Teste de Recuperação – 29/1/2011 – Versão 1

1. Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$. Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

Teste de Recuperação – 29/1/2011 – Versão 2

1. Sendo $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^2 + y^4}$, determine $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Teste de Recuperação – 12/1/2009

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} , & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 , & \text{se } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

Diga, justificadamente, se f é contínua na origem. Sugestão: Relembre que $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$.

Teste 1 – 7/11/2009

1. Calcule ou mostre que não existe o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^7+y^7}{x^6+y^6}$.

Teste 1 – 5/11/2011

2. Seja

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{kx^3+y^4}{2x^2+y^2} , & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 , & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determine k de modo que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 5$.

Teste de Recuperação – 26/6/2009

1. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{a}}(0,0) = 1$ e $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{b}}(0,0) = 3$, onde $\vec{a} = (1,2)$ e $\vec{b} = (0,1)$. Determine a matriz Jacobiana $D\varphi(0,0)$.

Teste 1 – 10/11/2012

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-y^3}{3x^2+y^2} , & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 , & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

(b) Determine as derivadas parciais de f em $(0,0)$.

(c) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

Teste de Recuperação/Exame – 24/6/2011

1. Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+4y^2}\,, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0\,, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Mostre que g é contínua na origem.

(b) Calcule $\nabla g(0,0)$ e a derivada de g na origem segundo o vector $v = (3,1)$. O que pode concluir acerca da diferenciabilidade de g na origem?

Derivada da Função Composta

Teste de Recuperação – 28/1/2013

2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $g(0,1) = -1$ e $Dg(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$ e seja $f(t) = (t^3, t^2)$. Determine $D(f \circ g)(0,1)$.

Teste 1 – 6/11/2010

2. Considere a função $h(x,y) = (x^3 + xy^2, \log(xy))$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que

$$Dg(2,0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule a derivada de $g \circ h$ no ponto $(1,1)$ segundo o vector $\vec{v} = (0,1)$.

Teste 1 – 5/11/2011

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $Df(1,1) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule a derivada parcial $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,0)$, sabendo que $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$, onde $u(x,y) = e^{-x}$ e $v(x,y) = e^y$.

Teste 1B – 24/4/2010

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função $f = f(u,v)$ de classe C^2 tal que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(2,0) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(2,0) = -1$. Sendo h a função definida por $h(x,y) = f(2x - y^2, xy)$, calcule $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(1,0)$.

Exame 2 – 7/7/2010

1. Considere a função $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \neq 0\,,\, y \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida pela expessão

$$f(x,y) = x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{xy}\right).$$

(a) Determine os pontos de $\mathbb{R}^2$ aos quais f pode ser prolongada por continuidade.

(b) Calcule a derivada de f segundo o vector $(2,1)$ no ponto $(x,y) = (1,1)$.

(c) Sendo $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a função definida pela expressão $g(t) = (1 + \cos(t), e^t)$, determine $D(g \circ f)(1,1)$.

(d) Seja $h(x,y) = f(x - f(x,y), y + x^2 - 1)$. Calcule $\dfrac{\partial h}{\partial y}(1,1)$.

Rectas/Planos Tangentes ou Normais

Teste de Recuperação – 18/6/2008
3. Determine a recta normal ao cone $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ no ponto $(3, 4, 5)$.

Teste 1 – 9/4/2011 – Versão 1
6. Determine um ponto da hipérbole $y^2 - x^2 = 3$ para o qual a recta tangente nesse ponto tem a direcção do vector $(2, 1)$.

Teste 1 – 9/4/2011 – Versão 2
6. Determine um ponto da superfície $z = 2 - xy$ para o qual a recta normal à superfície nesse ponto passa na origem.

Pontos Críticos e Extremos

Exame 2 – 7/7/2010
3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $g(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x$.

Teste 1 – 7/11/2009
3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade do campo escalar $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $h(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - z^2 + 6z + 2x - 2y$.

Teste de Recuperação – 18/6/2008
2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $\nabla f(0, 1) = (0, 1)$. Seja ainda $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x, y) = f(y, \cos x)$.

(a) Mostre que $(0, 0)$ é um ponto de estacionaridade de φ.

(b) Sabendo que a entrada $(1, 1)$ da matriz Hessiana de f no ponto $(0, 1)$ é -2, mostre que a matriz Hessiana de φ no ponto $(0, 0)$ é

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} .$$

(c) Classifique o ponto de estacionaridade $(0, 0)$ de φ.

Integrais Múltiplos – Teorema de Fubini e Mudança de Variáveis

Teste 1 – 10/11/2012
4. Considere o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$. Sendo $g(x, y) = 3e^{y^3}$, calcule $\displaystyle\int_A g$.

Teste 1 – 14/4/2012
4. Considere o conjunto definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z < 2 \, , \, z > y^2 \, , \, 0 < x < 1 \, , \, y > 0\} .$$

(a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dx)dy$, e da forma $\int(\int(\int dy)dz)dx$.

(b) Calcule o integral da função $f(x, y, z) = x$ em V.

Teste de Recuperação – 4/1/2008

1. Considere o conjunto $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 < z < 2-x-y \,,\, 0 < x < 1 \,,\, 0 < y < 1\}$.

(a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

(b) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(c) Calcule o integral da função $f(x,y,z) = x$ em V.

Teste 2 – 14/1/2012

1. Seja $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 < z < 2 - \sqrt{x^2+y^2} \,,\, x^2+y^2 < 1 \,,\, x > 0 \,,\, y > 0\}$.

(a) Obtenha uma expressão para o volume de V usando integrais triplos da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(b) Através de uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o momento de inércia de V relativo ao eixo OZ, considerando uma densidade de massa $k(x,y,z) = y$.

Teste de Recuperação – 23/6/2012

4. Considere o conjunto definido por $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 < z < y < 2 \,;\, 0 < x < 2y+z\}$. Escreva uma expressão para o volume de D em termos de integrais iterados da forma:

(a) $\int(\int(\int\, dx)dy)dz$;

(b) $\int(\int(\int\, dz)dy)dx$.

Teste de Recuperação – 23/6/2012

5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o volume do conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 < x < (y^2+z^2)^{1/4} \,;\, z > 0 \,;\, x^2+y^2+z^2 < 2\} \;.$$

Teste de Recuperação – 4/1/2008

2. Através de uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa do sólido

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y > |x| \,,\, x^2+y^2 < 1 \,,\, 0 < z < \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\right\}$$

e cuja densidade de massa é a função $\sigma(x,y,z) = x^2+y^2$.

Teste 2 – 15/12/2007

2. Usando a mudança de variáveis $u = x+y; v = y-x^3$ para calcular a massa do conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x+y < 2 \,,\, 0 < y-x^3 < 1\} \;,$$

cuja densidade de massa é a função $\sigma(x,y) = 1+3x^2$.

Teste de Recuperação – 28/1/2013

4. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{2y}{x}e^{xy}$ e o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0 \,,\, y > 0 \,,\, 1 < xy < 2 \,,\, 1 < \frac{y}{x} < 3\} \;.$$

Calcule $\displaystyle\int_S f$, utilizando uma mudança de variáveis apropriada.