Cálculo Diferencial e Integral II

Exame/Testes de recuperação (versão 1) - 2 de Julho de 2018 - 8h

Duração: 90 minutos

Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

1. Seja $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+3y^2}$$

   (a) Verifique que existe o limite de g no ponto $(0,0)$.

   (b) Diga se $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = \cos\big[g(x,y)\big]$ possuiu um prolongamento contínuo em $\mathbb{R}^2$.

   (c) Sendo $\tilde{g}(x,y) = g(x,y)$ para todo o $(x,y) \neq (0,0)$ e $\tilde{g}(x,y) = 0$, prove que existe a derivada de $\tilde{g}$ segundo qualquer vector mas $\tilde{g}$ não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Solução:

   (a) Para cada $m \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to 0^+} g(x,mx) = 0$. Então o limite, se existir, é 0. Como $\big|g(x,y)\big| = 2|y|\frac{x^2}{x^2+3y^2} \leq 2|y| \leq 2\|(x,y)\|$, basta escolher $\epsilon = 2\delta$ para verificar a definição de limite.

   (b) Como a função cosseno é contínua em 0, então existe o limite de $h = \cos\circ g$ quando $(x,y) \to (0,0)$, com o valor: $\cos\big(\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\big) = \cos(0) = 1$. Assim h é prolongável por continuidade a $\tilde{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com $\tilde{h}(0,0) = 1$.

   (c) A derivado segundo qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ é

$$D_{(a,b)}\tilde{g}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\tilde{g}((0,0)+t(a,b)) - \tilde{g}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2a^2tb}{t(t^2a^2+3t^2b^2)} = \frac{2a^2b^2}{a^2+3b^2}.$$

   Porém

$$\nabla\tilde{g}(0,0) = \big(D_{(1,0)}\tilde{g}(0,0), D_{(0,1)}\tilde{g}(0,0)\big) = (0,0).$$

   Se $\tilde{g}$ fosse diferenciável em $(0,0)$ então seria $D_{(a,b)}\tilde{g}(0,0) = \nabla\tilde{g}(0,0)\cdot(a,b) = 0$, o que é falso na maior parte dos casos (p. ex., para $a = b = 1$).

2. Considere as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x,y) = 2x^2+3y^2+1$ e $g(u) = \frac{\log(u)}{u}$.

   (a) Calcule $D(g\circ f)$.

   (b) Mostre que $(0,0)$ é um ponto crítico de $g\circ f$ e classifique-o.

   (c) Mostre que cada ponto de $\{(x,y) : 2x^2+3y^2 = e-1\}$ é um ponto crítico de $g\circ f$ e classifique estes pontos críticos.

Solução:

(a) $Df(x,y) = \begin{bmatrix} 4x & 6y \end{bmatrix}$, $Dg(u) = \frac{1-\log u}{u^2}$;

$$D(g\circ f)(x,y) = Dg(f(x,y))Df(x,y) = \frac{1-\log(2x^2+3y^2+1)}{(2x^2+3y^2+1)^2}\begin{bmatrix} 4x & 6y \end{bmatrix}$$

(b) $D(g\circ f)(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo $(0,0)$ é um ponto crítico de $g\circ f$. A matrix hessiana é (com $\varphi(x,y) = \frac{1-\log(2x^2+3y^2+1)}{(2x^2+3y^2+1)^2}$):

$$D^2(g\circ f)(x,y) = \begin{bmatrix} 4\varphi(x,y) + 4x\frac{\partial\varphi}{\partial x} & 4x\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ 6y\frac{\partial\varphi}{\partial x} & 6\varphi(x,y) + 6y\frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$D^2(g\circ f)(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Como os valores próprios de $D^2(g\circ f)(0,0)$ são ambos positivos, $(0,0)$ é um ponto de mínimo.

(c) Seja C_a, com $a>1$, o conjunto dos pontos (x,y) tais que $2x^2+3y^2 = a-1$ (os C_a são elipses com centro na origem; faça um esboço destas curvas para alguns valores de a). Nos pontos (x,y) tais que $2x^2+3y^2 = e-1$ (em C_e):

$$D(g\circ f)(x,y) = \frac{1-\log(e-1+1)}{(e-1+1)^2}\begin{bmatrix} 4x & 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

logo são pontos críticos. Note que o teste de 2ª ordem (através da matriz hessiana) falha pois a função é constante em C_e. Mas, para $(x,y)\in C_a$, a derivada segundo a normal exterior a C_a, que é $(4x,6y)$:

$$D_{(4x,6y)}(g\circ f)(x,y) = \nabla(g\circ f)(x,y)\cdot(4x,6y) = \frac{1-\log a}{a^2}(16x^2+36y^2)$$

Assim, para $(x,y)\in C_a$ com $a<e$ (elipse interior a C_e), $D_{(4x,6y)}(g\circ f)(x,y) > 0$, e para $(x,y)\in C_a$ com $a>e$ (elipse exterior a C_e), $D_{(4x,6y)}(g\circ f)(x,y) < 0$
Ou seja, a função $g\circ f$ cresce quando (x,y) se aproxima de C_e e decresce quando (x,y) se afasta de C_e. Concluimos que os pontos de C_e são pontos de máximo.

3. Considere o subconjunto

$$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z\leq 2\ ,\ x+z\leq 1\ ,\ x\geq 0\ ,\ y\geq 0\ ,\ z\geq 0\}.$$

(a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais iterados da forma $\int(\int(\int f(x,y,z)dy)dz)dx$.

(b) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais iterados da forma $\int(\int(\int f(x,y,z)dx)dz)dy$.

(c) Sendo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y,z)=x$, calcule $\iiint_A f$.

Solução:

(a)

$$\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{2-x-z} f(x,y,z)dy\right)dz\right)dx$$

(b)

$$\int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^{1-z} f(x,y,z)dx\right)dz\right)dy+\int_1^2\left(\int_0^{2-y}\left(\int_0^{2-y-x} f(x,y,z)dx\right)dz\right)dy$$

(c)

$$\begin{aligned}\iiint_A f &= \int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^{1-z} xdx\right)dz\right)dy+\int_1^2\left(\int_0^{2-y}\left(\int_0^{2-y-x} xdx\right)dz\right)dy\\ &= \int_0^1\left(\int_0^1\frac{(1-z)^2}{2}dz\right)dy+\int_1^2\left(\int_0^{2-y}\frac{(2-y-z)^2}{2}dz\right)dy\\ &= \int_0^1\frac{1}{6}dy+\int_1^2\frac{(2-y)^3}{6}dy \quad = \quad \frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{5}{24}\end{aligned}$$

4. Calcule o volume do conjunto

$$P=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z\geq 0\ ,\ x^2+y^2\leq 4\ ,\ z\geq 0\right\}.$$

Solução: A transformação em coordenadas cilíndricas $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$ e $z=z$ transforma $T=\{(\rho,\theta,z):0<\theta<2\pi, 0<\rho<2, 0<z<\rho^2\}$ no conjunto P. Assim:

$$\mathrm{vol}_3(P)=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\left(\int_0^{\rho^2}\rho dz\right)d\rho\right)d\theta=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^2\rho^3d\rho\right)=8\pi$$

5. Sejam $n\in\mathbb{N}^+$, $R\in\mathbb{R}^+$, $B_R=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|\leq R\}$ e f uma função contínua definida em B_R. Mostre que existe $p\in B_R$ tal que

$$\int_{B_R} f(x)=f(p)\times\mathrm{vol}(B_R).$$

Solução: Como B_R é compacto e f é contínua, pelo teorema de Weierstrass existem o máximo e o mínimo de f em B_R, isto é, existem $a, b \in B_R$ tais que:

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \qquad \text{para quaisquer} \quad x \in B_R$$

. Então

$$f(a)\,\mathrm{vol}(B_R) = \int_{B_R} f(a)dx \leq \int_{B_R} f(x)dx \leq \int_{B_R} f(a)dx = f(b)\,\mathrm{vol}(B_R),$$

donde resulta que

$$f(a) \leq \frac{1}{\mathrm{vol}(B_R)} \int_{B_R} f(x)dx \leq f(b).$$

Pelo teorema do valor intermédio (que é aplicável à função contínua f no conjunto conexo B_R) existe $p \in B_R$ tal que

$$f(p) = \frac{1}{\mathrm{vol}(B_R)} \int_{B_R} f(x)dx.$$

Teste 2

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \Big(2y\,\mathrm{e}^x + \cos(xy), \cos(xy) + \mathrm{e}^{xy}\Big).$$

Prove que f é invertível numa bola centrada em $(0, \pi)$. Sendo $g(u, v) = \Big(x(u, v), y(u, v)\Big)$ a inversa local de f determine $\dfrac{\partial y}{\partial v}(2\pi + 1, 2)$.

Solução:

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 2ye^x - y\operatorname{sen}(xy) & 2e^x - x\operatorname{sen}(xy) \\ ye^{xy} - y\operatorname{sen}(xy) & xe^{xy} - x\operatorname{sen}(xy) \end{bmatrix}$$

Como $\det Df(0, \pi) = \begin{bmatrix} 2\pi & 2 \\ \pi & 0 \end{bmatrix} = -2\pi \neq 0$, então pelo teorema da função inversa existe a inversa de f, g, de classe C^1, definida numa vizinhança de $f(0, \pi) = (2\pi + 1, 2)$. Além disso, $Dg(2\pi+1, 2) = [Df(0, \pi)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\pi \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}$, pelo que $\frac{\partial y}{\partial v}(2\pi+1, 2) = -1$.

2. Seja M o conjunto definido por

$$M = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \mathrm{e}^{z^2} = 2\ ,\ x + 2y = 2\Big\}$$

(a) Prove que M é uma variedade diferencial e indique a sua dimensão.

(b) Determine o plano normal a M no ponto $(0, 1, 0)$.

(c) Determine, ou prove que não existem, os extremos de $\phi : M \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x, y, z) = z$.

Solução:

(a) M é o conjunto de nível-0 da função de classe C^1 dada por $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + e^{z^2} - 2, x + 2y - 2)$ e

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2ze^{z^2} \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma vez que a segunda linha nunca se anula, a característica de $DF(x, y, z) \geq 1$; para ser menor que 2, a primeira linha teria que ser linearmente dependente da segunda, o que implica que $y = 2x$ e $z = 0$. Substituindo nas equações que definem M, obtém-se $5x^2 = 1$ e $5x = 2$ (impossível). Concluimos que a característica de $DF(x, y, z)$, para qualquer $(x, y, z) \in M$, é 2.

(b) $DF(0,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, pelo que $(x,y,z) = (0,1,0) + \alpha(0,2,0) + \beta(1,2,0)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ é a equação do plano normal na forma paramétrica. Como os vectores $(0,2)$ e $(1,2)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$, então $(x,y) = (0,1) + \alpha(0,2) + \beta(1,2)$ é um elemento arbitrário de $\mathbb{R}^2$. Assim, em alternativa, o plano normal em $(0,1,0)$ é $\{(x,y,z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z = 0\}$ ou, abreviadamente, é dado pela equação $z = 0$.

(c) Como qualquer ponto de M satisfaz $x^2 + y^2 + \mathrm{e}^{z^2} = 2$, então $x^2 < 2$, $y^2 < 2$ e $z^2 < \log 2$. Resulta então que M é uma curva limitada (e fechada). Pelo teorema de Weierstrass, existe o máximo e o mínimo de ϕ em M. Esses pontos serão soluções do problema de extremos condicionados para ϕ em M:

$$\begin{cases} (0,0,1) = \lambda_1(2x, 2y, 2ze^{z^2}) + \lambda_2(1,2,0) \\ x^2 + y^2 + ze^{z^2} = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2y\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2ze^{z^2}\lambda_1 = 1 \\ x^2 + y^2 + ze^{z^2} = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 2 e subtraindo o resultado da segunda, obtém-se $(4x-2y)\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x$ ou $\lambda_1 = 0$. Pela terceira equação, $\lambda_1 = 0$ é impossível. Substituindo $y = 2x$ nas duas últimas equações e resolvendo, obtêm-se apenas as duas soluções:

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \pm\sqrt{\log\frac{6}{5}}\right)$$

Como $\phi\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, -\sqrt{\log\frac{6}{5}}\right) = -\sqrt{\log\frac{6}{5}}$ e $\phi\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \sqrt{\log\frac{6}{5}}\right) = \sqrt{\log\frac{6}{5}}$ então $-\sqrt{\log\frac{6}{5}}$ é o mínimo de ϕ em M e $\sqrt{\log\frac{6}{5}}$ é o máximo de ϕ em M.

3. Considere o campo vectorial $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$f(x,y,z) = \Big(0, 2\,\mathrm{sen}(2y+z), \mathrm{sen}(2y+z) + x^2 + y^2\Big)$$

e a linha $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\gamma(t) = \Big((1-t)\cos(2\pi t), (1-t)\,\mathrm{sen}(2\pi t), t\Big)\ ,\ t \in [0,1]$$

(a) Verifique que $g(x,y,z) = \Big(0, 2\,\mathrm{sen}(2y+z), \mathrm{sen}(2y+z)\Big)$ é conservativo e calcule o trabalho de g ao longo de Γ.

(b) Calcule o trabalho de f ao longo de Γ.

Solução:

(a)
$$Dg(x,y,z) = \begin{bmatrix} D_1g_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2g_2 & 2\cos(2y+z) \\ 0 & 2\cos(2y+z) & D_3g_3 \end{bmatrix}$$

é simétrica em $\mathbb{R}^3$, logo g é fechado em $\mathbb{R}^3$. Como $\mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo, então $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo gradiente. Facilmente se verifica que $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por $\varphi(x,y,z) = -\cos(2y+z)$ é um potencial para g. Pelo teorema fundamental do cálculo:

$$\int_\Gamma g \cdot d\gamma = \varphi(\gamma(1)) - \varphi(\gamma(0)) = \varphi(0,0,1) - \varphi(1,0,0) = 1 - \cos(1)$$

(b) Como $f(x,y,z) = g(x,y,z) + h(x,y,z)$, onde $h(x,y,z) = (0,0,x^2+y^2)$ e tendo em conta que

$$\int_\Gamma h \cdot d\gamma = \int_0^1 \big(0,0,(1-t)^2\big) \cdot \big(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), 1\big) dt = \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{3},$$

então:
$$\int_\Gamma f \cdot d\gamma = \int_\Gamma g \cdot d\gamma + \int_\Gamma h \cdot d\gamma = \frac{4}{3} - \cos(1)$$

4. Seja S a superfície definida por

$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = 1 + y^2 + z^2 \ , \ x > 0 \ , \ y^2 + z^2 < 1\big\}$$

(a) Considerando que S tem uma densidade de carga dada por $\sigma(x,y,z) = x$, determine a carga de S.

(b) Determine o fluxo do campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x,y,z) = \big(x^2, -xy, -xz + y^2\big)$ através de S orientada no sentido da normal unitária ν tal que $\nu(1,0,0) = (1,0,0)$.

Solução:

(a) S é uma porção de um hiperbolóide de revolução (em torno do eixo Ox) cuja parametrização em coordenadas cilíndricas $x = x$, $y = \rho\cos\theta$ e $z = \rho \operatorname{sen}\theta$ é

$$g(\rho,\theta) = \left(\sqrt{1+\rho^2}, \rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta\right), \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Assim,
$$Dg(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} & 0 \\ \cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix},$$

$$\left(\det Dg^T Dg\right)^{1/2} = \left(\det \begin{bmatrix} \frac{\rho^2}{1+\rho^2}+1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}\right)^{1/2} = \left(\frac{1+2\rho^2}{1+\rho^2}\rho^2\right)^{1/2} = \rho\frac{\sqrt{1+2\rho^2}}{\sqrt{1+\rho^2}}$$

pelo que, com $T = \{(\rho,\theta) : 0 < \rho < 1, \quad 0 < \theta < 2\pi\}$:

$$\begin{aligned} \int_S \sigma &= \int_T x(\rho,\theta)\left(\det Dg^T Dg\right)^{1/2} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,\frac{\sqrt{1+2\rho^2}}{\sqrt{1+\rho^2}}d\rho\right)d\theta \;=\; \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho\,\left(1+2\rho^2\right)^{1/2}d\rho\right)d\theta \\ &= \frac{\pi}{3}\left(3^{3/2}-1\right) \;=\; \pi\left(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

(b) Notando que a intersecção do hiperbolóide $x^2 = 1+y^2+z^2$, $x>0$ com a superfície cilíndrica $y^2+z^2=1$ é a circunferência $x=\sqrt{2}$, $y^2+z^2=1$, então o domínio D descrito por

$$\sqrt{1+y^2+z^2} < x < \sqrt{2}, \quad y^2+z^2 < 1$$

tem fronteira $S \cup S_2$, com $S_2 = \{(x,y,z) : x = \sqrt{2}, y^2+z^2 < 1\}$. Pelo teorema da divergência (e como $\operatorname{div} F(x,y,z) = 0$):

$$0 = \int_D \operatorname{div} F = \int_S F\cdot\nu + \int_{S_2} F\cdot\nu,$$

onde ν é a normal exterior a D. Assim, e parametrizando S_2 em coordenadas cartesianas: $g(y,z) = (\sqrt{2},y,z)$, com $(y,z)\in B = \{(y,z) : y^2+z^2<1\}$, e

$$\begin{aligned} \int_S F\cdot\nu dS &= -\int_{S_2} F\cdot\nu dS \;=\; -\int_B (2,-y\sqrt{2},-z\sqrt{2}+y^2)\cdot(1,0,0)dxdy \\ &= -\int_B 2dxdy \;=\; -2\operatorname{vol}_2(B) \;=\; -2\pi. \end{aligned}$$

Como a normal exterior a D tem componente z negativa, o resultado obtido é o simétrico do pretendido. O fluxo pedido é pois 2π.

5. Seja S a superfície definida por

$$S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y^2+z^2 = 4\right\}$$

e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por

$$G(x,y,z) = \left(2(x-2)\,\mathrm{e}^{y+z}, (x-2)^2\,\mathrm{e}^{y+z} - z, (x-2)^2\,\mathrm{e}^{y+z} + y\right)$$

(a) Calcule $\nabla\times G$. Verifique que é um vector tangente a S em todos os pontos desta superfície. Diga se G é conservativo.

(b) Determine, usando a definição, o trabalho de G ao longo da circunferência que resulta da intersecção de S com o plano $x = 2$, percorrida no sentido horário quando vista do ponto $(100, 0, 0)$.

(c) Determine o trabalho de G ao longo da linha $\Gamma \subset S$ parametrizada por

$$\gamma(\theta) = \Big(\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta \Big) \ , \ \ \theta \in [0, 2\pi].$$

Solução:

(a) $\operatorname{rot} G(x, y, z) = (2, 0, 0)$ (calcule). Um vector normal ao cilindro S num ponto $(x, y, z) \in S$ é $(0, 2y, 2z)$, e

$$\operatorname{rot} G(x, y, z) \cdot (0, 2y, 2z) = 0.$$

Resulta assim que $\operatorname{rot} G$ é tangente a S em todos os pontos deste cilindro. Como $\operatorname{rot} G$ é sempre não nulo, G é não conservativo.

(b) Parametrizando o circunferência dada, C, por

$$g(\theta) = (2, 2\cos\theta, -2\operatorname{sen}\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int_C G \cdot dg &= \int_0^{2\pi} G(2, 2\cos\theta, -2\operatorname{sen}\theta) \cdot g'(\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (0, 2\operatorname{sen}\theta, 2\cos\theta) \cdot (0, -2\operatorname{sen}\theta, -2\cos\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -4 d\theta = -8\pi
\end{aligned}$$

(c) Considerando agora a superfície cilíndrica S dada por $y^2 + z^2 = 4$ e compreendida entre a curva Γ e a circunferência da alínea b), C, o bordo de S é, convenientemente, $\Gamma \cup C$. Aplicando o teorema de Stokes (verifique que as curvas têm sentido compatível com uma orientação de S) e usando o facto de $\operatorname{rot} G$ ser tangente a S:

$$0 = \int_S \operatorname{rot} G \cdot \nu dS = \int_C G \cdot dg + \int_\Gamma G \cdot d\gamma.$$

Em conclusão:

$$\int_\Gamma G \cdot d\gamma = -\int_C G \cdot dg = 8\pi.$$

6. Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável, limitada e conexa, cujo bordo é uma variedade-1, T, $D \subset \mathbb{R}^3$ um aberto tal que $\overline{S} \subset D$ e $f : D \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 tal que, em cada ponto $a \in T$, $f(a)$ pertence ao espaço normal a T no ponto a. Prove que o conjunto $\{x \in S : (\nabla \times f)(x) \cdot \nu(x) = 0\}$, em que $\nu(x)$ é uma das normais unitárias de S, é infinito.

Solução: Sendo $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, uma parametrização de T, como $f(\gamma(t))$ pertence ao espaço normal a T em $\gamma(t)$:

$$f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \qquad \text{para qualquer} \quad t \in [a,b] \tag{1}$$

Pelo teorema de Stokes,

$$\int_S \operatorname{rot} f \cdot \nu dS = \int_T f \cdot d\gamma = 0, \tag{2}$$

sendo que o último integral é nulo por (1). Admitindo que o conjunto de **todos** os zeros da função

$$\operatorname{rot} f \cdot \nu$$

em S é

$$B = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \subset S,$$

então $\operatorname{rot} f(x) \cdot \nu(x)$ não pode mudar de sinal em $S \setminus B$.

Caso contrário, isto é, supondo a existência de $a, b \in S \setminus B$ tais que $\operatorname{rot} f(a) \cdot \nu(a) > 0$ e $\operatorname{rot} f(b) \cdot \nu(b) < 0$, aplicando o teorema do valor intermédio à função contínua $\operatorname{rot} f \cdot \nu$ no conjunto conexo $S \setminus B$ deveria existir um zero de $\operatorname{rot} f \cdot \nu$ não pertencente a B. Ora isto contradiz a definição de B.

Concluimos assim que se o número de zeros de $\operatorname{rot} f \cdot \nu$ em S é finito então $\operatorname{rot} f(x) \cdot \nu(x)$ é sempre positivo em S [ou sempre < 0]; mas assim, por continuidade da função integranda, $\int_S \operatorname{rot} f \cdot \nu dS > 0$ [ou < 0]. Em ambos os casos, isto contradiz (2).

(Nota: para ter cotação completa não era exigido que o aluno provasse que $S \setminus B$ é conexo).