Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exame/Teste de Recuperação - 02 de Julho de 2018, 8:00h - versão 1

Duração: Exame (3h), Teste (1h30)

Apresente e justifique todos os cálculos
Para exame a cotação de cada pergunta é metade da cotação da mesma pergunta para teste

Teste 1

1. Seja $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+3y^2}.$$

[2.0] (a) Verifique se existe o limite de g no ponto $(0,0)$.

[0.5] (b) Diga se $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = \cos\big[g(x,y)\big]$ possui um prolongamento contínuo em $\mathbb{R}^2$.

[1.5] (c) Sendo $\widetilde{g}(x,y) = g(x,y)$ para todo o $(x,y) \neq (0,0)$ e $\widetilde{g}(0,0) = 0$, prove que existe a derivada de $\widetilde{g}$ segundo qualquer vector no ponto $(0,0)$, mas $\widetilde{g}$ não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

2. Considere as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x,y) = 2x^2+3y^2+1$ e $g(u) = \dfrac{\log u}{u}$.

[2.0] (a) Calcule $D(g \circ f)$.

[2.0] (b) Mostre que $(0,0)$ é um ponto crítico de $g \circ f$ e classifique-o.

[1.0] (c) Mostre que cada ponto em $\big\{(x,y) : 2x^2+3y^2 = \mathrm{e}-1\big\}$ é um ponto crítico de $g \circ f$ e classifique esses pontos críticos.

3. Considere o subconjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \leq 2\ ,\ x+z \leq 1\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \geq 0\}.$$

[2.0] (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais iterados da forma $\int(\int(\int f(x,y,z)dy)dz)dx$.

[2.0] (b) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais iterados da forma $\int(\int(\int f(x,y,z)dx)dz)dy$.

[1.0] (c) Sendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y,z) = x$, calcule $\iiint_A f$.

[3.0] 4. Calcule o volume do conjunto

$$\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z \geq 0\ ,\ x^2+y^2 \leq 4\ ,\ z \geq 0\big\}.$$

[3.0] 5. Sejam $n \in \mathbb{N}^+$, $R \in \mathbb{R}^+$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\}$ e f uma função contínua definida em B_R. Mostre que existe $p \in B_R$ tal que

$$\int_{B_R} f(x) = f(p) \times \mathrm{vol}(B_R).$$

Teste 2

[2.0] 1. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y)=\Big(2y\,e^x+\cos(xy),\cos(xy)+e^{xy}\Big).$$

Prove f é invertível numa bola centrada em $(0,\pi)$. Sendo $g(u,v)=\Big(x(u,v).y(u,v)\Big)$ a inversa local de f determine $\dfrac{\partial y}{\partial v}(2\pi+1,2)$.

2. Seja M o conjunto definido por

$$M=\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+e^{z^2}=2\ ,\ x+2y=2\Big\}$$

[1.5] (a) Prove que M é uma variedade diferencial e indique a sua dimensão.

[1.5] (b) Determine a recta normal a M no ponto $(0,1,0)$.

[2.0] (c) Determine, ou prove que não existem, os extremos de $\phi : M\to\mathbb{R}$ definida por $\phi(x,y,z)=z$.

3. Considere o campo vectorial $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definido por

$$f(x,y,z)=\Big(0,2\,\mathrm{sen}(2y+z),\mathrm{sen}(2y+z)+x^2+y^2\Big)$$

e a linha $\Gamma\subset\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\gamma(t)=\Big((1-t)\cos(2\pi t),(1-t)\,\mathrm{sen}(2\pi t),t\Big)\ ,\ t\in[0,1]$$

[1.5] (a) Verifique que $g(x,y,z)=\Big(0,2\,\mathrm{sen}(2y+z),\mathrm{sen}(2y+z)\Big)$ é conservativo e calcule o trabalho de g ao longo de Γ.

[1.5] (b) Calcule o trabalho de f ao longo de Γ.

4. Seja S a superfície definida por

$$S=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2=1+y^2+z^2\ ,\ x>0\ ,\ y^2+z^2<1\big\}$$

[1.5] (a) Considerando que S tem uma densidade de carga dada por $\sigma(x,y,z)=x$, determine a carga de S.

[2.5] (b) Determine o fluxo do campo $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definido por $F(x,y,z)=\big(x^2,-xy,-xz+y^2\big)$ através de S orientada no sentido da normal unitária ν tal que $\nu(1,0,0)=(1,0,0)$.

5. Seja S a superfície definida por

$$S=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y^2+z^2=4\big\}$$

e $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por

$$G(x,y,z)=\Big(2(x-2)\,e^{y+z},(x-2)^2\,e^{y+z}-z,(x-2)^2\,e^{y+z}+y\Big)$$

[1.0] (a) Calcule $\nabla\times G$. Verifique que é um vector tangente a S em todos os pontos desta superfície. Diga se G é conservativo.

[1.0] (b) Determine, usando a definição, o trabalho de G ao longo da circunferência que resulta da intersecção de S com o plano $x=2$, percorrida no sentido horário quando vista do ponto $(100,0,0)$.

[1.0] (c) Determine o trabalho de G ao longo da linha $\Gamma\subset S$ parametrizada por

$$\gamma(\theta)=\Big(\mathrm{sen}\,\theta,2\cos\theta,2\,\mathrm{sen}\,\theta\Big)\ ,\ \theta\in[0,2\pi].$$

[3.0] 6. Sejam $S\subset\mathbb{R}^3$ uma superfície orientável, limitada e conexa, cujo bordo é uma variedade-1, T, $D\subset\mathbb{R}^3$ um aberto tal que $\overline{S}\subset D$ e $f:D\to\mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 tal que, em cada ponto $a\in T$, $f(a)$ pertence ao espaço normal a T no ponto a. Prove que o conjunto $\{x\in S : (\nabla\times f)(x)\cdot\nu(x)=0\}$, em que $\nu(x)$ é uma das normais unitárias de S, é infinito.