Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Exercícios Resolvidos

Derivadas

Exercício 1 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *definida pela expressão*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \sin(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calcule as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Resolução: Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ podemos simplesmente derivar f em ordem a x e obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2)^2 - 2x^2y(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} \sin(x^2+y^2) + \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2} 2x \cos(x^2+y^2)$$

e, portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0.$$

Para calcular a segunda derivada parcial usamos a definição e obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Exercício 2 *Considere a função* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

a) Calcule a derivada de f *no ponto* $(0,1)$.

b) Calcule a derivada de f *no ponto* $(1,0)$ *segundo o vector* $v = (1,1)$.

Resolução:

a) Sendo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, temos,

$$Df(0,1) = \nabla f(0,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\right) = (0,1).$$

b) $D_v f(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot v = (1,0) \cdot (1,1) = 1$

Exercício 3 *Considere a função* $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.

a) Caracterize topologicamente o domínio de f.

b) Descreva os conjuntos de nível de f.

c) Calcule a derivada de f *no ponto* $(0,1)$.

d) Calcule as derivadas direccionais de f *no ponto* $(1,0)$.

Resolução:

a) Dado que deveremos ter $x^2+y^2 > 0$, o domínio de f é o conjunto aberto, não limitado e conexo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) Cada conjunto de nível C_α de f será caracterizado pela condição $f(x,y) = \alpha$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim, teremos

$$C_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(x^2+y^2) = \alpha\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = e^\alpha\}$$

e, portanto, os conjuntos de nível de f serão as circunferências centradas na origem.

c) Note-se que as derivadas parciais de f são contínuas no domínio de f e, portanto, a função f é diferenciável e a sua derivada no ponto $(0,1)$ será representada pela matriz

$$Df(0,1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}_{(0,1)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Alternativamente, teremos

$$Df(0,1) = \nabla f(0,1) = (0,2).$$

d) Seja $w = (u,v) \in \mathbb{R}^2$ um vector unitário qualquer. Então, a derivada de f segundo w será dada por

$$D_w f(1,0) = \begin{bmatrix} \frac{2x}{x^2+y^2} & \frac{2y}{x^2+y^2} \end{bmatrix}_{(1,0)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 2u$$

Exercício 4 *Considere a função* $f(x,y,z) = e^x yz$ *e seja* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *uma função de classe* C^1 *tal que* $g(0,0) = (0,1,2)$ *e*

$$Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule a derivada direccional $D_v(f \circ g)(0,0)$ *em que* $\vec{v} = (1,2)$.

Resolução: Pelo Teorema da Função Composta temos

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(0,0) &= Df(g(0,0)Dg(0,0) \\ &= Df(0,1,2)Dg(0,0) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,2) & \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dado que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^x yz$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = e^x z$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = e^x y$, então

$$D(f \circ g)(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 13 \end{bmatrix}.$$

Sendo $\|v\| = \sqrt{5}$, obtemos

$$\begin{aligned} D_v(f \circ g)(0,0) &= D(f \circ g)(0,0)\frac{v}{\|v\|} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{8+26}{\sqrt{5}} = \frac{34\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Exercício 5 *Considere as funções:*

$$f(x,y,z) = (z, -x^2, -y^2) \quad \text{e} \quad g(x,y,z) = x + y + z.$$

Sejam $v = (1,2,3)$ *e* $u = (2,3,\frac{1}{2})$.

a) Calcule as matrizes Jacobianas de f, g e $g \circ f$.

b) Calcule as seguintes derivadas direccionais:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1,1),\ \frac{\partial f}{\partial u}(0,0,1), \frac{\partial g}{\partial v}(0,1,0),\ \frac{\partial (g\circ f)}{\partial u}(2,0,1).$$

c) Determine a direcção de crescimento máximo de $g \circ f$ no ponto $(1,0,1)$.

d) Determine a recta normal ao parabolóide

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - x^2 - y^2 = 3\},$$

no ponto $(1,1,5)$.

Resolução:

a) Temos,

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2x & 0 & 0 \\ 0 & -2y & 0 \end{bmatrix},$$

e

$$Dg(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos também, $g \circ f(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = z - x^2 - y^2$, pelo que

$$D(g\circ f)(x,y,z) = \begin{bmatrix} -2x & -2y & 1 \end{bmatrix}.$$

Note-se que as derivadas parciais de $f, g, g \circ f$ são contínuas pelo que estas funções são diferenciáveis.

b) Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1,1) = Df(1,1,1)\cdot v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0,1) = Df(0,0,1)\cdot u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(0,1,0) = Dg(0,1,0)\cdot v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 6.$$

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial u}(2,0,1) = D(g\circ f)(2,0,1)\cdot u = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{15}{2}.$$

c) A direcção de crescimento máximo é dada por $\nabla(g\circ f)(1,0,1) = (-2,0,1)$, ou, normalizando, por $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$.

d) P é o conjunto de nível do campo escalar $g\circ f$ dado por $g\circ f(x,y,z) = 3$. Logo, o vector $\nabla(g\circ f)(1,1,5) = (-2,-2,1)$ é normal a P em $(1,1,5)$. A recta normal a P em $(1,1,5)$ é então dada por

$$\begin{aligned} \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (1,1,5) + t(-2,-2,1), t\in\mathbb{R}\} &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-1, y-1, z-5) = \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-1 = -2(z-5)\ ;\ x \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2z = 11\ ;\ x = y\} \end{aligned}$$

Exercício 6 *Determine a recta normal e o plano tangente ao cone*

$$C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z = 3 - \sqrt{x^2+y^2}\,\}$$

no ponto $(3,4,-2)$.

Resolução: Consideramos a função $F(x,y,z) = z + \sqrt{x^2+y^2}$. Vemos que $C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ F(x,y,z) = 3\}$ logo C é uma superfície de nível de F. Logo, em cada ponto, o gradiente de F dá-nos a direcção normal ao cone nesse ponto. Assim temos

$$\nabla F(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

e $\nabla F(3,4,-2) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$. Portanto a recta normal a C no ponto $(3,4,-2)$ é dada por

$$R = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ (x,y,z) = (3,4,-2) + \lambda\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right),\ \lambda\in\mathbb{R}\right\},$$

donde se conclui que as equações cartesianas que definem a recta são

$$5x - 3z - 21 = 0\ ;\ 5y - 4z - 12 = 0.$$

O plano tangente é dado pela equação

$$(x-3, y-4, z+2)\cdot\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{3}{5}(x-3)+\frac{4}{5}(y-4)+(z+2)=0 \iff 3x+4y+5z=15.$$

Exercício 7 *Determine o plano normal à linha*

$$L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=x^2\,;\, y=0\},$$

no ponto $(2,0,4)$.

Resolução: Note-se que L é o conjunto dos pontos, em $\mathbb{R}^3$, da forma $(x,0,x^2)$, com $x\in\mathbb{R}^3$. Portanto, é a linha descrita pela função $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, de classe C^1 e definida por $\gamma(t)=(t,0,t^2)$.

Assim, temos $\gamma'(t)=(1,0,2t)$ e $\gamma(2)=(2,0,4)$.

Sabendo que o vector $\gamma'(2)=(1,0,4)$ é, por definição, tangente a L no ponto $\gamma(2)=(2,0,4)$, o correspondente plano normal será dado pela equação

$$(1,0,4)\cdot(x-2,y,z-4)=0,$$

ou seja,

$$x-2+4(z-4)=0\Leftrightarrow x+4z=18.$$