Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exercícios de Auto-Avaliação
(Continuidade. Diferenciabilidade)

1. Caracterize topologicamente os seguintes conjuntos:

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$.

b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \neq 1\}$.

c) $C \cup D$, sendo

$$\begin{aligned} C &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \ ; \ x = y \ ; \ -1 < x < 1\} \\ D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 \ ; \ x = -y \ ; \ -1 \leq x \leq 1\}. \end{aligned}$$

d) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = y < 1\}$.

e) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < x^2 + 1 \ ; \ -1 < x < 1\}$.

f) $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1 \ ; \ z > \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

2. Calcule ou mostre que não existem os limites seguintes:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^4+y^2}$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+2y^2}$.

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{y}$.

e) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.

3. Estude a continuidade das funções seguintes:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right), & \text{se } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } y = 0 \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

4. Calcule o gradiente de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$;

b) $f(x,y) = e^x \cos y$.

5. Para cada uma das funções seguintes determine a direcção segundo a qual a respectiva derivada direccional é máxima no ponto indicado:

a) $f(x,y,z) = x^2y^3z^4 \ ; \ (1,1,1)$

b) $f(x,y,z) = \log(x^2 + 2y^2 - 3z^2)$; $(1,1,0)$.

6. Utilizando a definição, calcule a derivada direccional da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ segundo o vector $v = (1,1)$ no ponto $(1,2)$.

7. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ as funções definidas por

$$f(x,y) = (e^{x+2y}, \sin(y+2x)),$$
$$g(u,v,w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2).$$

   a) Serão f, g e $f \circ g$ diferenciáveis no seu domínio ? Justifique.
   b) Calcule as matrizes Jacobianas de f, g e $f \circ g$.
   c) Calcule a derivada de f segundo o vector $v = (2,3)$ no ponto $(1,0)$.
   d) Calcule a derivada de g segundo o vector $(2,3,4)$ no ponto $(1,0,1)$.
   e) Calcule a derivada de $f \circ g$ segundo o vector $(2,3,1)$ no ponto $(1,2,1)$.

8. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ as funções definidas por

$$f(x,y) = (x^2 + y, 2x + y, e^y + 2x),$$
$$g(u,v,w) = uvw.$$

   a) Serão f, g e $g \circ f$ diferenciáveis no seu domínio ? Justifique.
   b) Calcule as matrizes Jacobianas de f, g e $g \circ f$.
   c) Calcule as derivadas de f e $g \circ f$ segundo o vector $(1,2)$ no ponto $(3,4)$.
   d) Calcule a derivada de g segundo o vector $(3,3,4)$ no ponto $(1,1,1)$.

9. a) Considere o caminho $\alpha : [-2,2] \to \mathbb{R}^2$ dado por $\alpha(t) = (t, t^2)$. Esboce a curva representada por α e determine as respectivas recta tangente e recta normal no ponto $(1,1)$.
   b) Considere o caminho $\beta : [0, 8\pi] \to \mathbb{R}^2$ dado por $\beta(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t)$. Esboce a curva representada por β e determine as respectivas recta tangente e recta normal no ponto $(0, \pi/2)$.
   c) Considere o caminho $\gamma : [0, 8\pi] \to \mathbb{R}^3$ dado por $\gamma(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t, t)$. Esboce a curva representada por γ e determine a recta tangente e o plano normal no ponto $(0, \pi/2, \pi/2)$.

10. Determine o plano normal e a recta tangente à linha $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^3 \,;\, z = 1\}$ no ponto $(1,1,1)$.

11. Determine a recta normal e o plano tangente ao elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 3,$$

    no ponto $(2,3,4)$.

12. Determine e classifique os pontos de estacionaridade dos seguintes campos escalares:
   a) $f(x,y) = e^{xy}$.
   b) $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2) + x$, em $x^2 + y^2 \leq 1$.
   c) $f(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy + z^2$.
   d) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-y}$.
   e) $f(x,y) = (1 - x^2 + y^2)e^{x-y}$.

13. Considere a função $f(x,y) = \displaystyle\int_0^{x+y} \operatorname{sen}(t^2)\, dt$.

    a) Mostre que f é diferenciável no seu domínio.

    b) Calcule a derivada de f no ponto $(1,1)$.

    c) Determine e classifique os pontos de estacionaridade de f.

14. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função que admite as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em $\mathbb{R}^2$. Mostre que f é diferenciável desde que uma destas derivadas parciais seja contínua.

15. Sendo f e g funções reais de variável real de classe C^2 considere a função

$$\phi(x,t) = f(x-t) + g(x+t).$$

Mostre que ϕ satisfaz a chamada equação das ondas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

16. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial e $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar ambos de classe C^2. Chama-se divergência de f ao campo escalar dado por

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z},$$

e rotacional de f ao campo vectorial definido por

$$\operatorname{rot} f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right).$$

Mostre que se tem

$$\operatorname{rot}(\nabla \phi) = 0\,; \quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0.$$

17. Seja $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^1 e considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F = \nabla \phi$. Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1.

    Mostre que se tem

$$\int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \phi(Q) - \phi(P),$$

em que $P = \gamma(0)$ e $Q = \gamma(1)$.

18. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e N o conjunto de nível zero de f. Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $\gamma(\mathbb{R}) \subset N$. Seja $A = \gamma(0)$.

    Mostre que os vectores $\nabla f(A)$ e $\gamma'(0)$ são ortogonais. Interprete geometricamente este resultado.