Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Exercícios de Auto-Avaliação
(Linhas, Superfícies, Multiplicadores de Lagrange)

1. Mostre que cada um dos conjuntos seguintes é uma variedade, determine a respectiva dimensão e descreva-o parametricamente:

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1\}$.
   b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,;\, y < |x|\,;\, |z| < 2\}$.
   c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y = 1 - x^2 - z^2\}$.
   d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\,;\, |z| < \dfrac{1}{2}\}$.
   e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = y^2 + 1\,;\, y = 3\}$.
   f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\,;\, x^2 + y^2 = 1\}$.

2. Determine o espaço normal e o espaço tangente à linha definida pelas equações

$$z = xy\,;\; x^2 + y^2 = 2$$

   no ponto $(1,1,1)$.

3. Determine a equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = 1 + e^{xy}$ no ponto $(0,1,2)$.

4. Determine as equações do plano tangente e da recta normal à superfície $z = x^4 + y^3$ no ponto $(1,1,2)$.

5. Determine as equações da recta tangente e do plano normal à linha descrita pelas equações $z = x^4 + y$ e $x + y + z = 6$ no ponto $(1,2,3)$.

6. Determine os extremos da função $f(x,y) = x^2y^2$ no conjunto definido por $x + y = 1$.

7. Determine os pontos da linha definida pelas equações $z = xy\,;\; x^2 + y^2 = 1$ que apresentam maior coordenada z.

8. Determine o ponto da intersecção do plano $x + z = 1$ com o parabolóide $z = x^2 + y^2$ que se encontra mais próximo da origem.

9. Mostre que a função $f(x,y) = xy - x$ tem extremos absolutos no conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \le y \le 1\},$$

   e determine-os.

10. Determine o menor rectângulo que contém o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido pela equação

$$x^2 + xy + y^2 = 27.$$