Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II
Teste de Preparação

Apresente e justifique todos os cálculos

Teste I

1. Seja$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{3x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

   (a) Mostre que f é contínua na origem.

   (b) Calcule $\nabla f(0,0)$ e a derivada de f na origem segundo o vector $v = (1,2)$. O que pode concluir acerca da diferenciabilidade de f na origem?

2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que

$$Dg(1,-1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} ,$$

   e seja $h(x,y) = (\cos(x+y^2), xy)$. Calcule $D(g \circ h)(-1,1)$.

3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = -y + y^2 + x^2 - x^4$.

4. Considere a região $D \subset \mathbb{R}^3$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2+y^2}, z + x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0\}.$$

   a) Escreva uma expressão para o volume de D da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$ e da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

   b) Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o volume de D.

5. Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1 e suponha que f não tem pontos de estacionaridade. Mostre que se $P \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de estacionaridade de $f \circ g$ então $\det(Dg(P)) = 0$.