Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de preparação

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto
$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : e^x + e^y + z = 3;\ x - z + 1 = 0\}.$$
   (a) Mostre que L é uma variedade e indique a sua dimensão.

   (b) Mostre que L é o gráfico de uma função $f(y) = (x(y), z(y))$, de classe C^1, numa vizinhança do ponto $(0,0,1)$ e calcule $x'(0)$.

2. Determine o vector de $\mathbb{R}^3$ cujo comprimento é igual a 3 e cuja soma das componentes é a maior possível.

3. Determine um ponto da superfície $z = 2 - xy$ para o qual a recta normal à superfície nesse ponto passa na origem.

4. Considere o campo vectorial $G(x,y) = (-y + x^3, x + y^5) + \nabla\psi(x,y)$ onde $\psi(x,y) = \cos\left(\frac{\pi x y}{2}\right)$. Calcule o trabalho de G ao longo da fronteira do quadrado $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon |x| \leq 1; |y| \leq 1\}$ percorrida no sentido anti-horário.

5. Sejam $F(x,y,z) = (x, y, z+1)$,
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon z = 1 - x^2 - y^2;\ y > 0;\ z > 0\right\}$$
   e seja $n = (n_1, n_2, n_3)$ a normal a S, unitária, tal que $n_3 > 0$.

   (a) Calcule a área de S.
   (b) Calcule o fluxo $\iint_S F \cdot n$ pela definição.
   (c) Calcule o fluxo $\iint_S F \cdot n$ usando o Teorema da Divergência.

6. Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular e $f\colon D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Considere a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ dada por
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon z = f(x,y); (x,y) \in D\right\}.$$
   Prove o Teorema de Stokes para a superfície S e para um campo vectorial de classe C^1, F, da forma $F = (F_1, F_2, 0)$.

   Sugestão: Use o Teorema de Green.