Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

# Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 11 de Junho de 2018 - 9h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

**Apresente e justifique todos os cálculos**

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 = 1, y^5 + z^2y^3 + 2x^2y = 3\}$$

(2val.) (a) Mostre que $M$ é uma variedade e indique a sua dimensão.

(1.5val.) (b) Determine o espaço tangente a $M$ no ponto $(1,1,0)$.

(1.5val.) (c) Mostre que a equação $y^5 + z^2y^3 + 2x^2y = 3$ define uma função $y(x,z)$ de classe $C^1$ num aberto em torno de cada ponto de $M$.

2. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = z^2, -1 < z < 0\}$$

e o campo vetorial $H \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$H(x,y,z) = (x, y, z(1+z))$$

(2val.) (a) Calcule a área de $S$.

(3val.) (b) Calcule o fluxo de $H$ através de $S$ no sentido da normal unitária com componente $z$ positiva.

(2val.) (c) Determine se $H$ é conservativo e, em caso afirmativo, calcule um potencial para $H$.

(2val.) (d) Calcule o trabalho de $H$ ao longo da curva definida pela intersecção de $S$ com o plano $3x + y = 3$ do ponto $(1, 0, -\frac{1}{3})$ ao ponto $(0, 3, -1)$.

3. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x\sqrt{y^2 + z^2} = 1, z > 0, 1 < x < 3\}$$

e o campo vetorial $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido pela expressão

$$F(x,y,z) = (0, xz + yz^2, -xy)$$

(2.5val.) (a) Calcule o fluxo de $\operatorname{rot} F$ através de $S$ no sentido da normal unitária com primeira componente positiva.

(0.5val.) (b) Dê um exemplo de um campo vetorial de classe $C^1$, não nulo, $G \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que o trabalho realizado por $G$ ao longo do bordo de $S$ seja nulo.

(3val.) 4. Mostre que a equação $y^5 + z^2y^3 + 2x^2y = 3$ define uma função $y(x,z)$ de classe $C^1$ num aberto que contém a circunferência $\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + z^2 = 1\}$ e calcule o mínimo dessa função sobre a circunferência.

*Sugestão: Use a alínea 1(c) e note que, para cada $(x,z)$, a função $g_{x,z}(y) = y^5 + z^2y^3 + 2x^2y$ é crescente.*