Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 11 de Junho de 2018 - 9h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1, z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2\}$$

(2val.) (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

(1.5val.) (b) Determine o espaço tangente a M no ponto $(0,-1,1)$.

(1.5val.) (c) Mostre que a equação $z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2$ define uma função $z(x,y)$ de classe C^1 num aberto em torno de cada ponto de M.

2. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = z^2, 0 < z < 1\}$$

e o campo vetorial $H \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$H(x,y,z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, z(1-z)\right)$$

(2val.) (a) Calcule a área de S.

(3val.) (b) Calcule o fluxo de H através de S no sentido da normal unitária com componente z negativa.

(2val.) (c) Determine se H é conservativo e, em caso afirmativo, calcule um potencial para H.

(2val.) (d) Calcule o trabalho de H ao longo da curva definida pela intersecção de S com o plano definido por $x + 2y = 2$ do ponto $(0,1,\frac{1}{2})$ ao ponto $(2,0,1)$.

3. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z\sqrt{x^2+y^2} = 1, x > 0, 1 < z < 2\}$$

e o campo vetorial $F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido pela expressão

$$F(x,y,z) = (yz, -xz + x^2y, 0)$$

(2.5val.) (a) Calcule o fluxo de $\operatorname{rot} F$ através de S no sentido da normal unitária com terceira componente negativa.

(0.5val.) (b) Dê um exemplo de um campo vetorial de classe C^1, não nulo, $G \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que o trabalho realizado por G ao longo do bordo de S seja nulo.

(3val.) 4. Mostre que a equação $z^5 + 2x^2z^3 + y^2z = 2$ define uma função $z(x,y)$ de classe C^1 num aberto que contém a circunferência $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ e calcule o máximo dessa função sobre a circunferência.

Sugestão: Use a alínea 1(c) e note que, para cada (x,y), a função $g_{x,y}(z) = z^5 + 2x^2z^3 + y^2z$ é crescente.