Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 21 de Abril de 2018 - 9h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Sejam

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^5}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x,y) = \cos(\pi - x^2 + xy).$$

(2val.) (a) Determine $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, caso exista.

(1val.) (b) Sendo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $F = (f, g)$, calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

(1val.) (c) Caso exista, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

(3 val.) (d) Dada uma função diferenciável $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $h(1,1) = (0,1)$ e $Dh(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, calcule $D(g \circ h)(1,1)$.

2. Sejam $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y + 3$ e $g(x,y) = x^4 + y^4 + 2$.

(2val.) (a) Classifique os pontos críticos de f em $\mathbb{R}^2$.

(1val.) (b) Justifique que $(0,0)$ é um ponto crítico de g em $\mathbb{R}^2$ e classifique este ponto.

3. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\,;\ z + x \leq 2\,;\ z - x \leq 2\,;\ z \geq 0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

(2 val.) (b) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

(3 val.) 4. Calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 6 - \sqrt{x^2+y^2}\,;\ x \geq 0\,;\ y \geq 0\}.$$

(3 val.) 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabendo que existe $R > 0$ tal que

$$x^2 + y^2 < R^2 \quad \text{implica} \quad \nabla f(x,y) \cdot (x,y) > 0,$$

mostre que $(0,0)$ é ponto de mínimo de f.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 21 de Abril de 2018 - 9h

Duração: 90 minutos

Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Sejam

$$f(x,y) = e^{1+x^2+y^2} \quad \text{e} \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^7}{3x^2+y^6} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2val.) (a) Determine $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$, caso exista.

(1val.) (b) Sendo $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $G = (f,g)$, calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} G(x,y)$.

(1val.) (c) Caso exista, calcule $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

(3val.) (d) Calcule $D(f \circ h)(1)$ onde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é diferenciável, com $h(1) = (1,0)$ e

$$Dh(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. Dadas $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$ e $g(x,y) = x^4 - y^4$.

(2val.) (a) Classifique os pontos críticos de f em $\mathbb{R}^2$.

(1val.) (b) Justifique que $(0,0)$ é um ponto crítico de g em $\mathbb{R}^2$ e classifique este ponto.

3. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\,;\, z + y \leq 2\,;\, z - y \leq 2\,;\, z \geq 0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

(2 val.) (b) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(3 val.) 4. Calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2\,;\, x \geq 0\,;\, y \geq 0\}.$$

(3 val.) 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabendo que existe $R > 0$ tal que

$$x^2 + y^2 < R^2 \quad \text{implica} \quad \nabla f(x,y) \cdot (x,y) > 0,$$

mostre que $(0,0)$ é ponto de mínimo de f.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 21 de Abril de 2018 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+4y^6}{3x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2val.) (a) Calcule, ou mostre que não existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.

(1val.) (b) Calcule $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$, caso exista.

(3val.) 2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $\phi(x,y) = f(x+y, 3x+y)$. Calcule $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,y)$ em termos das derivadas parciais de f.

3. Dadas $f(x,y) = x^2+y^2+x^2y$ e $g(x,y) = y^5 - y^3x$.

(3val.) (a) Classifique os pontos críticos de f em $\mathbb{R}^2$.

(1val.) (b) Justifique que $(0,0)$ é um ponto crítico de g em $\mathbb{R}^2$ e classifique este ponto.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1\,;\, x+z \leq 2\,;\, x+z \geq -2\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

(2 val.) (b) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

(3 val.) 5. Calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1-\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1+\sqrt{x^2+y^2}\,;\, x^2+y^2 \leq 1\,;\, x \geq 0\,;\, y \geq 0\}.$$

(3 val.) 6. Dados

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \quad \text{e} \quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\},$$

seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável no interior de D tal que a restrição de f a C é constante. Seja $\gamma : [0,1] \to D$ um caminho de classe C^1 tal que $\gamma([0,1]) \cap C = \{\gamma(0), \gamma(1)\}$. Mostre que existe $t_0 \in]0,1[$ tal que $\gamma'(t_0)$ é ortogonal ao gradiente de f em $\gamma(t_0)$.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 21 de Abril de 2018 - 11h30h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^5}{x^2 + 3y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2val.) (a) Calcule, ou mostre que não existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(1val.) (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, caso exista.

(3val.) 2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e $\phi(x,y) = g(2x+y, x+2y)$. Calcule $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)$ e $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x,y)$ em termos das derivadas parciais de g.

3. Dadas $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy^2$ e $g(x,y) = x^3 - x^2 y$.

(3val.) (a) Classifique os pontos críticos de f em $\mathbb{R}^2$.

(1val.) (b) Justifique que $(0,0)$ é um ponto crítico de g em $\mathbb{R}^2$ e classifique este ponto.

4. Considere o conjunto
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\,;\; y + z \leq 2\,;\; y + z \geq -2\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dz)dx)dy$.

(2 val.) (b) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(3 val.) 5. Calcule o volume do conjunto
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4 - \sqrt{x^2+y^2}\,;\; x \geq 0\,;\; y \geq 0\}.$$

(3 val.) 6. Dados
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{e} \quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$
seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável no interior de D tal que a restrição de f a C é constante. Seja $\gamma : [0,1] \to D$ um caminho de classe C^1 tal que $\gamma([0,1]) \cap C = \{\gamma(0), \gamma(1)\}$. Mostre que existe $t_0 \in]0,1[$ tal que $\gamma'(t_0)$ é ortogonal ao gradiente de f em $\gamma(t_0)$.