Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de preparação

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 5 + \dfrac{x^2y^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ a, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determine o valor de a para que f seja contínua na origem.

2. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = (xy, x^2+y^2)$ e a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, de classe C^1, e tal que $f(1,1,1) = (1,2)$ e

$$Df(1,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule a derivada da função $g \circ f$ no ponto $(1,1,1)$, segundo o vector $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

3. Determine e classifique os pontos críticos do campo escalar dado por

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + \frac{2}{3}z^3 - 2z.$$

4. Mostre que a função $f(x,y) = \max(x,y)$ é integrável no intervalo $I = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, e calcule o respectivo integral.

5. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z < 2\,;\ 0 < x < 1\,;\ y > 0\,;\ z > 0\}.$$

   (a) Escreva expressões para o volume de V em termos de integrais iterados das duas formas seguintes: $\int(\int(\int dz)dy)dx$; $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

   (b) Calcule o volume de V.

6. Calcule, em coordenadas cilíndricas, o momento de inércia relativo ao eixo Oz do sólido

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1\,;\ 0 < z < 1 + x^2 + y^2\,;\ y > 0\},$$

cuja densidade de massa é constante e igual a um.