DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/26

Cursos: LEAmb, LEIC-A, LEMat, LEQ

TESTE 3 (VERSÃO A)

7 DE JANEIRO DE 2026, 20H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

1. Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = \left(\operatorname{sen} x - \frac{y^3}{3},\, \cos y + \frac{x^3}{3},\, xyz \right)$.

   (a) (1 val.) Calcule o rotacional de F.
   Resolução:

Como F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, então $\operatorname{rot} F$ está bem definido em $\mathbb{R}^3$ e

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \operatorname{sen} x - \frac{y^3}{3} & \cos y + \frac{x^3}{3} & xyz \end{vmatrix} \\ &= \left(xz,\, -yz,\, x^2 + y^2 \right) \end{aligned}$$

   (b) (4 val.) Use (obrigatoriamente) o teorema de Stokes para calcular

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma$$

onde γ é a curva $x^2 + y^2 = 4$ no plano $z = 0$, percorrida em sentido negativo quando observada do ponto $(0,0,10)$.
Resolução

(a) Uma superfície S_0, cujo bordo é a circunferência dada pode ser

$$S_0 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 < 4 \right\}.$$

Note que qualquer superfície cujo bordo é γ serve. Escolhemos a mais simples possível: a que está contida no plano coordenado $z = 0$. A sua parametrização pode ser:

$$g(x,y) = (x,y,0), \quad \text{definida em} \quad T = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 4 \right\}.$$

A normal unitária induzida por g é $\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = (1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1)$, à qual corresponde o sentido positivo da circunferência; como o caminho pedido tem o sentido oposto, escolhemos $(0,0,-1)$ (se tem dúvidas, faça uma figura).

Finalmente, temos que F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e S é uma superfície regular. O teorema de Stokes garante-nos que o trabalho pedido é dado por:

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_{\partial S_0} F \cdot d\gamma = \iint_{S_0} \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$$

Usando a alínea (a), resulta então que:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot d\gamma &= \iint_T \operatorname{rot} F\big(g(x,y)\big) \cdot \Big(- \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \Big) \, dx dy \\
&= \iint_T \operatorname{rot} F(x,y,0) \cdot (0,0,-1) \, dx dy \\
&= \iint_T \big(0,0,x^2+y^2\big) \cdot (0,0,-1) \, dx dy = \iint_T -\big(x^2+y^2\big) \, dx dy
\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, então com

$$\widetilde{T} = \big\{ (r,\theta) \, : \, 0 \leq r \leq 2 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi \big\},$$

o integral anterior fica:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot d\gamma &= \iint_{\widetilde{T}} -r^2 \, r dr d\theta \;=\; \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^2 -r^3 \, dr \Big) d\theta \;=\; -\int_0^{2\pi} d\theta \;\cdot\; \int_0^2 r^3 \, dr \\
&= -2\pi \;\cdot\; \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 \;=\; -2\pi \, \frac{16}{4} = -8\pi.
\end{aligned}$$

(c) (2 val.) Determine, justificando

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS,$$

onde $S = \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; z - 2 = -\sqrt{x^2+y^2}, \; z > 0 \big\}$ orientada pela normal unitária com terceira componente negativa.

Resolução

Começamos por notar que a superfície é o cone $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$, com $z > 0$, cujo bordo está na intersecção de $z = 0$ com $z - 2 = -\sqrt{x^2+y^2}$, ou seja:

$$-\sqrt{x^2+y^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = 4 \qquad (\text{em } \; z = 0).$$

Trata-se do caminho, γ da alínea (b); note-se que o sentido de γ é compatível com a orientação de S (deve fazer uma figura). Pelo teorema de Stokes (aplicado a S) e alínea (b):

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma = \int_\gamma F \cdot d\gamma = -8\pi.$$

2. (7 val.) Resolva o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0 \\ u(t,0) = u\left(t,\frac{\pi}{2}\right) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(0,x) = 4\,\mathrm{sen}(2x) - 2\,\mathrm{sen}(4x) & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Resolução:

Começamos por resolver o problema de valores de fronteira

$$u_t = 4u_{xx} \quad \text{e} \quad u(t,x) = u\left(t,\tfrac{\pi}{2}\right) \qquad \text{com } x \in \left]0,\tfrac{\pi}{2}\right[,\ t>0,$$

(um problema de Dirichlet homogéneo) pelo método de separação de variáveis; para tal, vamos procurar soluções não nulas da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$T'(t)X(x) = 4T(t)X''(x) \qquad \text{ou seja} \qquad \frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X},$$

válida para qualquer $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ e $t > 0$. Como o primeiro membro da igualdade depende apenas de t, enquanto o segundo membro depende apenas de x, para que a última igualdade se verifique para todo $t > 0$ e $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, ambos os membros da mesma têm que ser constantes. Assim sendo, para certos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{T'}{4T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda.$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$u(t,0) = 0 \ \Rightarrow\ T(t)X(0) = 0 \ \Rightarrow\ T(t) \equiv 0 \text{ ou } X(0) = 0$$

dado que $T(t)$ não deve ser a função nula.

$$u(t,0) = 0 \ \Rightarrow\ X(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$u\left(t,\tfrac{\pi}{2}\right) = 0 \ \Rightarrow\ X\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\\ X(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

e

$$T' = 4\lambda T \qquad \text{se } t > 0. \tag{2}$$

O problema (1) é um problema de valores próprios para a equação $X'' - \lambda X = 0$ com condições de fronteira de Dirichlet $X(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0$. Assim, os valores próprios são $-4n^2$ (para todo o $n \in \mathbb{N}$), associados às soluções $X_n(x) = \mathrm{sen}(2nx)$.

Podemos agora resolver (2), apenas para os valores de λ encontrados anteriormente, pois para outros valores de λ a solução de (1) é a solução nula, que não nos interessa. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, e a menos de combinação linear

$$T'(t) = -8n^2 T \ \Rightarrow\ T_n(t) = e^{-8n^2 t}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-8n^2 t}\,\mathrm{sen}(2nx)$$

Consequentemente qualquer combinação linear também o será, ou seja

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-8n^2 t} \operatorname{sen}(2nx)$$

Para calcular as constantes A_n com $n = 1, 2, \dots$ utilizamos a condição inicial:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(2nx) &= A_1 \operatorname{sen}(2x) + A_2 \operatorname{sen}(4x) + A_3 \operatorname{sen}(6x) + \cdots \\ &= u(0,x) = 4\operatorname{sen}(2x) - 2\operatorname{sen}(4x)\end{aligned}$$

Assim

$$A_1 = 4, \qquad A_2 = -2 \qquad \text{e} \qquad A_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}.$$

Finalmente, a solução do problema de valores iniciais e de fronteira é

$$u(t,x) = 4e^{-8t} \operatorname{sen}(2x) - 2e^{-32t} \operatorname{sen}(4x).$$

3. Considere a função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$.
   (a) (4 val.) Determine a série de Fourier de $f(x)$ e estude-a quanto à convergência pontual em $[-\pi, \pi]$.
   Resolução:

(a) Como f é uma função par, a série de Fourier é uma série de cossenos:

$$SFf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

onde

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \pi.$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x| \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\cancel{\left. x\,\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\right|_0^{\pi}} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\left.\cos(nx)\right|_0^{\pi} \;=\; \frac{2}{\pi n^2}\big(\cos(n\pi) - 1\big) \;=\; \frac{2}{\pi n^2}\big((-1)^n - 1\big)\end{aligned}$$

Logo, a série de Fourier de f é

$$SFf(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos(nx)$$

Para determinar a soma da série, notamos que f é contínua no seu domínio e $f(-\pi) = |-\pi| = \pi = f(\pi)$. Além disso, f é seccionalmente C^1. Pelo teorema da convergência pontual das séries de Fourier:

$$SFf(x) = |x| \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

(b) (2 val.) Utilizando o resultado anterior, calcule a soma da série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Resolução:

Pelo resultado anterior aplicado ao ponto $x = 0$, $SFf(0) = 0$, ou seja:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \;=\; 0.$$

Tendo em conta que

$$\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \;=\; \begin{cases} -\frac{2}{(2k-1)^2} & \text{se } \; n = 2k-1 \;\; (\text{com } k \in \mathbb{N}) \\ 0 & \text{se } \; n = 2k \;\; (\text{com } k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

resulta que

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \;=\; 0.$$

Concluímos pois que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \;=\; \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \;=\; \frac{\pi^2}{8}.$$