DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III
1º Semestre 2022/23
Cursos: LEEC

Teste 3 (Versão A)

11 de Janeiro de 2023, 19h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes, excepto nas alíneas de escolha múltipla.

Duração: 45m.

1. Considere a equação diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = q(t) \tag{1}$$

onde $q(t)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

(a) (2 val.) Uma base do espaço de soluções da equação homogénea associada a (1) é formada pelas funções:

A. e^{-t}, e^{-3t} B. e^{t}, e^{2t} C. e^{t}, e^{3t} D. e^{-t}, e^{-2t}

(a) ____________

(b) (1 val.) Sabendo que $t^2 + 3t + 4$ é solução de (1), a função $q(t)$ é

A. $2t^2 + 1$ B. $3t^2 + t + 2$ C. $t^2 - 2t$ D. $t^2 + 3t + 4$

(b) ____________

(c) (3 val.) Sendo $q(t) = 6e^{3t}$, calcule a solução de (1) que verifica as condições iniciais $y(0) = 3$ e $y'(0) = 9$.

2. Considere o PVI

$$y'' + 4y = \delta(t-2) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0$$

sendo $\delta(t-2)$ a distribuição delta de Dirac centrada em 2.

(a) (1 val.) A transformada de Laplace da solução do PVI é

A. $\dfrac{e^{2s}}{s^2+4}$ B. $\dfrac{e^{-2s}}{s^2+4}$ C. $\dfrac{e^{-3s}}{s^2+9}$ D. $\dfrac{e^{3s}}{s^2+9}$

(a) ____________

(b) (2 val.) Calcule a solução do PVI.

(c) (2 val.) Sendo f uma função definida em $\mathbb{R}_0^+$ verificando $\left|f(t)\right| \leq Me^{\alpha t}$ para certos $M \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que:

$$\mathcal{L}\big\{f'(t)\big\}(s) \;=\; -f(0) + s\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}(s) \quad , \quad \forall s > \alpha$$

3. Para $L > 0$, considere $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ contínua e com derivada seccionalmente contínua, cuja série de Fourier é

$$\mathrm{SF}\, f(x) \;=\; \frac{\pi^2}{12} \;+\; \cos x \;+\; \frac{1}{4}\cos(2x) \;+\; \frac{1}{9}\cos(3x) \;+\; \frac{1}{16}\cos(4x) \;+\; \cdots$$

Para cada alínea, escolha a opção correcta.

(a) (1 val.) O valor de L é

A. π B. 2 C. 1 D. 2π

(a) ______________

(b) (2 val.) Para cada $n \in \mathbb{N}$, o valor do integral $\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos(nx)\,dx$ é

A. $\dfrac{\pi}{n^2}$ B. $\dfrac{2}{n^2}$ C. $\dfrac{1}{n^2}$ D. $\dfrac{\pi}{2n^2}$

(b) ______________

(c) (2 val.) Assumindo que $f(0) = \dfrac{\pi^2}{4}$, utilize a série de Fourier dada para determinar a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

4. (4 val.) Resolva o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira usando o método de separação de variáveis:

$$\begin{cases} u_t \;=\; \dfrac{1}{4} u_{xx} & \text{se} \quad x \in \,]0, \pi[\;, \quad t > 0 \\ u(t, 0) \;=\; u(t, \pi) \;=\; 0 & \text{se} \quad t > 0 \\ u(0, x) \;=\; \mathrm{sen}(4x) + 2\,\mathrm{sen}(6x) & \text{se} \quad x \in [0, \pi]. \end{cases}$$