

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/26

Cursos: LEAmb, LEIC-A, LEMat, LEQ

TESTE 2 (VERSÃO A)

26 DE NOVEMBRO DE 2025, 20H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 45m.

1. (a) (2 val.) Determine os valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $\text{rot}(ax, -bz, cy) = 0$.
(b) (2 val.) Mostre que para qualquer campo vectorial F de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$, $\text{div}(\text{rot } F) = 0$.
2. Considere a superfície S parametrizada por:

$$g(u, v) = (2u, vu, 1 - 2v) \quad \text{para } u^2 + v^2 < 4.$$

- (a) (2 val.) Verifique que $P = (2, 1, -1)$ pertence à superfície e determine a equação cartesiana do plano tangente a S em P .
- (b) (3 val.) Calcule a área de S .
3. Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (e^{y+z^2}, y, e^{x+y^2})$.
(a) (1 val.) Calcule a divergência de F .
(b) (2 val.) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de superfície que é a fronteira do sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > \sqrt{x^2 + z^2} \text{ e } y < 2\}.$$

na direcção da normal exterior ao sólido.

- (c) (3 val.) Calcular o fluxo de F através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sqrt{x^2 + z^2} \text{ e } y < 2\}.$$

na direcção da normal com segunda componente negativa.

4. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = yf(t, y), \quad y(0) = 3,$$

onde f é uma função de classe C^1 definida em $\mathbb{R}^2$ tal que, para qualquer $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(t, y) \geq \frac{y}{3}$.

- (a) (2 val.) Mostre que o problema tem solução única local.
- (b) (3 val.) Estude o intervalo máximo de solução do problema. Deve indicar o comportamento da solução na vizinhança de cada extremo finito desse intervalo.