Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2022/23

Cursos: LEEC, LEIC

DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

TESTE 1 (VERSÃO A)

27 DE OUTUBRO DE 2022, 19H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes. Duração: 45m.

1. Considere o campo vectorial definido em $\mathbb{R}^3$ por $F(x,y,z) = \big(x^2,\, xy,\, z\big)$. Utilize o teorema da divergência para calcular $\iint_S F \cdot \nu \, dS$ através das seguintes superfícies.

   [3,0 val.] (a) S é a fronteira do sólido $E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 4 - x^2 - y^2\big\}$, sendo ν a normal unitária exterior a E.

   [3,0 val.] (b) $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2, z > 0\big\}$, com a normal unitária $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ tal que $\nu_3 > 0$.

2. Considere o campo vectorial definido em $\mathbb{R}^3$ por $G(x,y,z) = \big(xy,\, y,\, -x^2 + y^2 z^2\big)$.

   [5,0 val.] (a) Calcule o fluxo do rotacional de G através da superfície dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ e $z > 1$, na direcção da normal com terceira componente positiva.

   [1,0 val.] (b) Determine o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que <u>G é um potencial vectorial</u> para F.

3. Considere a equação diferencial de 1ª ordem $xy' + 4y = x^2$.

   [3,0 val.] (a) Determine a solução geral da equação.

   [2,0 val.] (b) Calcule a solução da equação que verifica $y(1) = 2$, e indique o seu intervalo máximo de existência de solução.

[3,0 val.] 4. Considere o conjunto aberto

$$U = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| < 2\Big\}.$$

Moste que para quaisquer campos escalares $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 em U e tais que $f(\mathbf{x}) = 0$ e $g(\mathbf{x}) = 0$ quando $\|\mathbf{x}\| \geq 1$, se tem

$$\iiint_U \big(\operatorname{div} \nabla g\big) f \;=\; \iiint_U \big(\operatorname{div} \nabla f\big) g.$$

Sugestão: pode ser útil considerar o campo vectorial $f\,\nabla g - g\,\nabla f$.