DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2026/27

Cursos: LEAmb, LEBiom, LEBiol, LEMat, LEQ

Teste 1 (Versão A)

20 de Outubro de 2026, 18h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 60 min.

1. Determine a solução dos problemas de valor inicial, indicando os respectivos intervalos máximos de solução.

   (a) (15 %) $\dfrac{dz}{dt} - (\operatorname{tg} t)\, z \;=\; \operatorname{tg} t\,, \qquad z(0) = 1.$

   Resolução:

   A equação é linear, e um factor integrante é dado por:

   $$\mu(t) = e^{\int -\operatorname{tg} t\, dt} = e^{\int \frac{-\operatorname{sen} t}{\cos t}\, dt} = e^{\log|\cos t|} = |\cos t| = \pm \cos t.$$

   Note que este cálculo é válido para $\cos t \neq 0$. Vamos tomar $\mu(t) = \cos t$. Multiplicando a equação pelo factor integrante, resulta que

   $$\cos t \, \frac{dz}{dt} - (\operatorname{sen} t) z \;=\; \operatorname{sen} t$$

   ou seja,

   $$\frac{d}{dt}\Big(\cos(t)\, z(t)\Big) \;=\; \operatorname{sen} t.$$

   Calculando as primitivas obtém-se (para $\cos t \neq 0$):

   $$\cos(t)\, z(t) = -\cos t + c, \qquad \text{onde } c \in \mathbb{R}.$$

   A solução geral é, pois:

   $$z(t) = -1 + \frac{c}{\cos t}.$$

   Da condição inicial $z(0) = 1$, resulta que $1 = -1 + c$, pelo que $c = 2$. A solução do PVI é

   $$z(t) = -1 + \frac{2}{\cos t}$$

   Como as soluções de $\cos t = 0$ são $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, o maior intervalo onde esta solução está definida, é de classe C^1 e contém $t_0 = 0$ é

   $$I_{\max} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

(b) (15 %) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1+y^2}{3}$, $y(0) = 0.$

Resolução:

A equação é equivalente a

$$\frac{1}{1+y^2}\,\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3},$$

que é uma equação separável. Assim sendo, a sua solução geral (na forma implícita) é dada por

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{1}{3}dt + c, \qquad \text{com } c \in \mathbb{R},$$

ou seja:

$$\operatorname{arctg} y = \left(\frac{t}{3}\right) + c.$$

Calculando c de forma a que $y(0) = 0$, obtém-se $c = 0$ e, como tal,

$$y(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{t}{3}\right)$$

Para determinar o intervalo máximo de solução, basta notar que a função obtida está definida e é de classe C^1 no conjunto dos $t \in \mathbb{R}$ que <u>não</u> verificam:

$$\frac{t}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{3\pi}{2} + 3k\pi = (1+2k)\,\frac{3\pi}{2} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Atendendo a que $t_0 = 0$, resulta que $I_{\max} = \left]-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

2. (20 %) Resolva o problema de valor inicial

$$t + y^3 + 3ty^2\,y' = 0 \quad , \quad y(1) = 1.$$

Explicite a solução e determine o intervalo máximo de solução.

Resolução:

Na equação diferencial temos

$$M(t,y) = t + y^3 \quad \text{e} \quad N(t,y) = 3ty^2.$$

Resulta que:

- M e N são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$
- $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 = \dfrac{\partial N}{\partial t}$ para qualquer t, y em $\mathbb{R}$.

Assim, o campo vectorial (M, N) é um campo gradiente em $\mathbb{R}^2$, pelo que a equação diferencial é exacta em $\mathbb{R}^2$; assim sendo, existe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla\varphi = (M, N)$. Para calcular φ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = t + y^3 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t,y) = \frac{t^2}{2} + ty^3 + g(y) \qquad \text{e}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3ty^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{t^2}{2} + ty^3 + g(y)\right) = 3ty^2$$
$$\Rightarrow \quad 3ty^2 + g'(y) = 3ty^2$$
$$\Rightarrow \quad g(y) = c, \qquad \text{com } \ c \in \mathbb{R}.$$

Assim, um potencial é $\varphi(t, y) = \dfrac{t^2}{2} + ty^3$. A solução geral da equação é dada por:

$$\frac{t^2}{2} + ty^3 = K \quad , \quad K \in \mathbb{R}.$$

Pela condição inicial $y(1) = 1$, $K = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$, pelo que a solução do PVI na forma implícita é

$$\frac{t^2}{2} + ty^3 = \frac{3}{2}.$$

Resolvendo esta equação em ordem a y:

$$ty^3 = \frac{3 - t^2}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad y^3 = \frac{3 - t^2}{2t} \qquad \Leftrightarrow$$

Obtém-se assim:

$$y(t) \ = \ \sqrt[3]{\frac{3 - t^2}{2t}}$$

Esta função está definida para $t \neq 0$ e é de classe C^1 se

$$\frac{3 - t^2}{2t} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \Leftrightarrow \qquad t \notin \left\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\right\}.$$

Tendo em conta que $t_0 = 1$, obtém-se:

$$I_{\max} = \left]0, \sqrt{3}\right[.$$

3. (20 %) Calcule o fluxo de

$$F(x, y, z) = \left(2x, \ z^2 + \operatorname{sen}(x^2), \ z + \operatorname{arctg}(x^2 y^2)\right)$$

através de $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 = y^2 + z^2 \text{ e } 0 < x < 2\right\}$ orientada pela normal unitária ν com componente x negativa.

Resolução:

Dado que $x > 0$, S está contida na superfície cónica $x = \sqrt{y^2 + z^2}$. Considere-se o sólido

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \sqrt{y^2 + z^2} < x < 2\right\}$$

Trata-se de um cone com vértice na origem e base no plano $x = 2$. A fronteira de E é $\partial E = S \cup S_2$, onde S_2 é a base do cone:

$$S_2 \ = \ \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y^2 + z^2 < 4 \, , \ x = 2\right\}$$

Note que E é um domínio regular. Temos ainda que F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}\left(z^2 + \operatorname{sen}(x^2)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z + \operatorname{arctg}(x^2y^2)\right) = 2 + 0 + 1 = 3.$$

Pelo teorema da divergência:

$$\iint_{\partial E} F \cdot \nu \, dS \;=\; \iiint_E \operatorname{div} F \, dV \;=\; \iiint_E 3 \, dV \;=\; 3\operatorname{Vol}_3(E) \;=\; 3 \cdot \frac{1}{3}\pi 2^2 \cdot 2 = 8\pi$$

Em alternativa, pode calcular o volume do cone E usando coordenadas cilíndricas $x = x$, $y = \rho\cos\theta$, $z = \rho\operatorname{sen}\theta$:

$$\operatorname{Vol}_3(E) = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_\rho^2 \rho \, dx d\rho d\theta = 2\pi \int_0^2 (2\rho - \rho^2) d\rho = 2\pi \left(\rho^2 - \frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_{\rho=0}^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

Calculamos agora o fluxo de F através de S_2 que, recordamos, é parte do plano $x = 2$. Em S_2, $\nu = \mathbf{e_1} = (1,0,0)$ e $F(x,y,z) = (4,\cdots,\cdots)$, pelo que $F \cdot \nu = 4$. Isto implica que

$$\iint_{S_2} F \cdot \nu \, dS \;=\; \iint_{S_2} 4 \, dS \;=\; 4\operatorname{Area}(S_2) = 4 \cdot \pi 2^2 = 16\pi.$$

Concluímos que:

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS \;=\; \iint_{\partial E} F \cdot \nu \, dS \;-\; \iint_{S_2} F \cdot \nu \, dS \;=\; 8\pi - 16\pi \;=\; -8\pi.$$

4. (20 %) Use o teorema de Stokes para calcular

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS,$$

onde $F(x,y,z) = (1-z,-y,x)$ e S é a parte do plano $y+z=2$ no interior do cilindro $x^2+y^2-2y=0$, orientada pela normal unitária com componente z positiva.

Resolução:

A superfície S satisfaz $z = 2 - y$. Trata-se do gráfico de $f(x,y) = 2-y$, onde f está definida num domínio T cuja fronteira, ∂T, é dada por:

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + (y-1)^2 = 1$$

O bordo de S é a intersecção de $x^2 + (y-1)^2 = 1$ com $z = 2 - y$. Note que S é elementar e, como a orientação de S é para cima, ∂S deve ter o sentido positivo quando visto de cima. Assim, uma parametrização do bordo de S é

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = 1 + \operatorname{sen} t \\ z(t) = 2 - y(t) = 2 - \operatorname{sen} t - 1 = 1 - \operatorname{sen} t \end{cases}$$

ou seja

$$\gamma(t) = \left(\cos t, 1 + \operatorname{sen} t, 1 - \operatorname{sen} t\right), \qquad \text{para} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sendo F de classe C^1 e S uma superfície elementar, o teorema de Stokes garante-nos que o fluxo pedido é dado por

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot v \, dS &= \int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} F\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(1-(1-\operatorname{sen} t), -(1+\operatorname{sen} t), \cos t\big) \cdot \big(-\operatorname{sen} t, \cos t, -\cos t\big)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(\operatorname{sen} t, -1-\operatorname{sen} t, \cos t\big) \cdot \big(-\operatorname{sen} t, \cos t, -\cos t\big)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-\operatorname{sen}^2 t - \cos t - \operatorname{sen} t \cos t - \cos^2 t\big) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-1 - \cos t - \operatorname{sen} t \cos t\big) dt \quad = \quad -t - \operatorname{sen} t - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t \,\Big|_0^{2\pi} \quad = \quad -2\pi.
\end{aligned}$$

5. (10 %) Seja γ um caminho fechado e simples contido no plano $x+y+z=1$ e percorrido no sentido directo quando visto do ponto $(0,0,10)$, e S a superfície contida no mesmo plano cujo bordo é γ. Mostre que:

$$\int_\gamma \big(\sqrt{3}\, z,\ -x,\ y\big) \cdot d\gamma \ = \ \text{Área}(S).$$

Resolução:

A superfície S, dada por $z = 1-x-y$, é elementar. Por outro lado, o campo vectorial $F(x,y,z) = \big(\sqrt{3}\, z,\ -x,\ y\big)$ é de classe C^1. Pelo teorema de Stokes:

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot v \, dS$$

F é uma aplicação linear, pelo que o seu rotacional deverá ser constante. De facto:

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sqrt{3}\, z & -x & y \end{vmatrix} = \big(1, \sqrt{3}, -1\big)$$

Uma parametrização de S pode ser dada por

$$g(x,y) = (x, y, 1-x-y),$$

onde g é definida na projecção de S no plano xOy. Calculando um vector normal unitário a S:

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \ = \ \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \ = \ (1,1,1) \qquad \Rightarrow \qquad v \ = \ \frac{1}{\|(1,1,1)\|}(1,1,1) \ = \ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

A orientação de v é para cima, logo é compatível com o sentido de γ. Resulta então que:

$$\operatorname{rot} F \cdot v = \big(1, \sqrt{3}, -1\big) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\big(1+\sqrt{3}-1\big) = 1.$$

Desta forma:

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot v \, dS \ = \ \iint_S dS \ = \ \text{Área}(S).$$