

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/26

Cursos: LEAmb, LEBiom, LEBiol, LEIC-A, LEMat, LEQ

TESTE 1 (VERSÃO A)

15 DE OUTUBRO DE 2025, 20H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 45m.

1. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \frac{2}{t}y = 2\frac{e^t}{t}, \quad y(1) = 1.$$

(a) (4 val.) Determine explicitamente a solução do PVI.

Resolução:

A equação é linear. Calculando um factor integrante:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = \exp(2 \log t) = \exp(\log t^2) = t^2.$$

A equação é equivalente a

$$t^2 \frac{dy}{dt} + 2ty = 2te^t \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(t^2 y) = 2te^t$$

Primitivando, obtém-se a solução geral:

$$t^2 y = \int 2te^t dt = 2te^t - \int 2e^t dt = 2te^t - 2e^t + c, \quad \text{com } c \in \mathbb{R},$$

ou seja:

$$y(t) = \frac{2t-2}{t^2}e^t + \frac{c}{t^2}.$$

Calculando c de forma a que $y(1) = 1$, obtém-se $c = 1$ e como tal

$$y(t) = \frac{2t-2}{t^2}e^t + \frac{1}{t^2}.$$

(b) (1 val.) O intervalo máximo de existência da solução do PVI é:

A. $[0, +\infty[$

B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

C. $] -\infty, 0[$

D. $\mathbb{R}$

E. $]0, +\infty[$

Resolução:

Basta notar que a função obtida em (a) está definida e é de classe C^1 no conjunto dos $t \in \mathbb{R}$ tais que $t \neq 0$. Como $t_0 = 1 > 0$, então $I_{\max} =]0, +\infty[$.

2. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{2x}{y} + \frac{y^2 - x^2}{y^2} y' = 0, \quad y(0) = -1.$$

(a) (1 val.) Indique **todos** os conjuntos onde a equação é exacta.

- A. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ B. $\mathbb{R}^2$ C. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$ D. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Resolução:

Escrevendo $M(x, y) = \frac{2x}{y}$ e $N(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{y^2}$, tem-se que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{2x}{y^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Logo, a equação é exacta em qualquer subconjunto aberto e simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2 \setminus (x, 0) : x \in \mathbb{R}$. As opções correctas são $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

(b) (3 val.) Determine a solução do PVI.

Resolução:

Como a equação é exacta no semiplano $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \ni (0, -1)$, existe um potencial $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla \varphi = (M, N)$. Resolvendo estas equações:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2x}{y} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x, y) = \int \frac{2x}{y} dx + g(y) = \frac{x^2}{y} + g(y);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1 - \frac{x^2}{y^2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{x^2}{y^2} + g'(y) = 1 - \frac{x^2}{y^2} \quad \Rightarrow \quad g(y) = y + c, \quad \text{com } c \in \mathbb{R}.$$

A solução geral é, pois:

$$\frac{x^2}{y} + y = K, \quad \text{com } K \in \mathbb{R}.$$

Como $y(0) = -1$, resulta que $K = -1$. A solução (na forma implícita) é dada por:

$$\frac{x^2}{y} + y = -1. \quad (1)$$

(c) (1 val.) Explícite a solução e indique o intervalo máximo de existência da solução do PVI. **Resolução:**

Para $y \neq 0$ (o que se verifica em D) a equação (1) é equivalente a

$$y^2 + y + x^2 = 0.$$

Resolvendo em ordem a y , obtém-se $y = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4x^2}}{2}$. Usando de novo a condição inicial, conclui-se que

$$y(x) = -\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1-4x^2} \right)$$

Esta solução está bem definida e é de classe C^1 para $1-4x^2 > 0$, pelo que $I_{\max} =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) (4 val.) Determine e^{At} .

Resolução:

Vamos começar por determinar uma matriz solução fundamental de $Y' = AY$, resolvendo o sistema equivalente. Assim, sendo $\mathbb{R}^3 \ni Y = (x, y, z)$ temos que

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$$

Da primeira equação, $y = \frac{1}{3}(x' - 2x)$. Substituindo na segunda equação e simplificando:

$$\frac{1}{3}(x'' - 2x') = 3x + \frac{2}{3}(x' - 2x)$$

$$x'' - 2x' = 9x + 2x' - 4x$$

$$x'' - 4x' - 5 = 0$$

O polinómio característico é $P(R) = R^2 - 4R - 5 = (R - 5)(R + 1)$, pelo que:

$$x(t) = ae^{5t} + be^{-t} \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Assim sendo:

$$y(t) = \frac{1}{3}(x' - 2x) = \frac{1}{3}(5ae^{5t} - be^{-t} - 2ae^{5t} - 2be^{-t}) = ae^{5t} - be^{-t}$$

A solução geral de $Y' = AY$ é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{5t} + be^{-t} \\ ae^{5t} - be^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ e^{5t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Desta forma, uma matrix solução fundamental associada à equação é

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ e^{5t} & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

Tendo em conta que

$$S^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

então

$$e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{-t} \\ e^{5t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{5t} + e^{-t} & e^{5t} - e^{-t} \\ e^{5t} - e^{-t} & e^{5t} + e^{-t} \end{bmatrix}.$$

(b) (1 val.) Calcule a solução de $Y' = AY + e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolução:

A solução do problema de valor inicial pode ser calculada pela fórmula da variação das constantes:

$$\begin{aligned}
 Y(t) &= e^{At} \left(Y(0) + \int_0^t e^{-As} b(s) ds \right) \\
 &= e^{At} \int_0^t \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-5s} + e^s & e^{-5s} - e^s \\ e^{-5s} - e^s & e^{-5s} + e^s \end{bmatrix} \cdot e^s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ds \\
 &= e^{At} \int_0^t \frac{e^s}{2} \begin{bmatrix} \cancel{e^{-5s}} + e^s - \cancel{e^{-5s}} + e^s \\ \cancel{e^{-5s}} - e^s - \cancel{e^{-5s}} - e^s \end{bmatrix} ds = e^{At} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{2s} \\ -e^{2s} \end{bmatrix} ds \\
 &= e^{At} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} e^{2s} \\ -\frac{1}{2} e^{2s} \end{array} \right]_{s=0}^t = e^{At} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} - 1 \\ 1 - e^{2t} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{5t} + e^{-t} & e^{5t} - e^{-t} \\ e^{5t} - e^{-t} & e^{5t} + e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} (e^{2t} - 1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} (e^{2t} - 1) \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

A solução pode também ser escrita desta forma mais simples:

$$Y(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t - e^{-t} \\ -e^t + e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sh } t \\ -\text{sh } t \end{bmatrix}.$$

4. Considere a equação diferencial

$$y'' - 4y' - 5y = b(t)$$

em que $b(t)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

(a) (1 val.) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

Resolução:

Usando a notação $y' = Dy$, obtém-se

$$y'' - 4y' - 5y = 0 \Leftrightarrow (D - 5)(D + 1)y = 0$$

pelo que a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}.$$

(b) (3 val.) Sendo $b(t) = 6e^{-t}$ calcule a solução da equação que satisfaz $y(0) = 0$ e $y'(0) = 5$.

Resolução:

O polinómio aniquilador da função $f(t) = 6e^{-t}$ é $P_A(D) = D + 1$. Aplicando $P_A(D)$ a ambos os membros da equação diferencial $(D - 5)(D + 1)y = 6e^{-t}$, obtém-se:

$$(D - 5)(D + 1)^2 y = (D + 1)(6e^{-t}) = 0,$$

cujas soluções gerais são

$$y(t) = \underbrace{c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t}}_{y_G(t)} + c_3 t e^{-t}.$$

Então $y_P(t) = c_3 t e^{-t}$ é o candidato a solução particular. Substituindo na equação $y'' - 4y' - 5y = 6e^{-t}$, obtém-se (para qualquer $t \in \mathbb{R}$):

$$-6c_3 e^{-t} = 6e^{-t} \quad \Rightarrow \quad c_3 = -1.$$

A solução geral da equação não homogénea é

$$y(t) = y_G(t) + y_P(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^{-t} - t e^{-t}, \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sendo que $y'(t) = 5e^{5t} + (-c_2 - 1 + t)e^{-t}$, então pelas condições iniciais:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 5c_1 - c_2 - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Assim sendo, a solução do problema de valor inicial é:

$$y(t) = e^{5t} - e^{-t} - t e^{-t}.$$

- (c) (1 val.) Indique a função $b(t)$ para a qual $\varphi(t) = t e^{5t} + e^{5t} + e^{-t}$ é uma solução particular da equação diferencial.

Resolução:

A equação diferencial é $P(D)y = b(t)$, com $P(D) = (D + 1)(D - 5)$. Como $e^{5t} + e^{-t}$ é solução da equação homogénea, então:

$$\begin{aligned} P(D)(t e^{5t} + e^{5t} + e^{-t}) &= P(D)t e^{5t} = (D + 1)(D - 5)t e^{5t} \\ &= (D + 1)(e^{5t} + 5t e^{5t} - 5t e^{5t}) \\ &= 5e^{5t} + e^{5t} = 6e^{5t}. \end{aligned}$$

Desta forma, se tomarmos $b(t) = 6e^{5t}$, a função $\varphi(t)$ é solução da equação diferencial $P(D)y = b(t)$, como pretendido.

Comentário: note que o termo $t e^{5t}$ da solução $\varphi(t)$ deve resultar de ressonância de $b(t)$ — com a raiz 5 do polinómio característico da equação homogénea.