

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2025/26

Cursos: LEAmb, LEBiom, LEBiol, LEIC-A, LEMat, LEQ

TESTE 1 (VERSÃO A)

15 DE OUTUBRO DE 2025, 20H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 45m.

1. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \frac{2}{t}y = 2\frac{e^t}{t}, \quad y(1) = 1.$$

(a) (4 val.) Determine explicitamente a solução do PVI.

(b) (1 val.) O intervalo máximo de existência da solução do PVI é:

- A. $[0, +\infty[$ B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ C. $]0, +\infty[$ D. $] -\infty, 0[$ E. $\mathbb{R}$

(b) _____

2. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{2x}{y} + \frac{y^2 - x^2}{y^2}y' = 0, \quad y(0) = -1.$$

(a) (1 val.) Indique **todos** os conjuntos onde a equação é exacta.

- A. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ B. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ C. $\mathbb{R}^2$ D. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$

(a) _____

(b) (3 val.) Determine a solução do PVI.

(c) (1 val.) Explícite a solução e indique o intervalo máximo de existência da solução do PVI.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) (4 val.) Determine e^{At} .

(b) (1 val.) Calcule a solução de $Y' = AY + e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. Considere a equação diferencial

$$y'' - 4y' - 5y = b(t)$$

em que $b(t)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

(a) (1 val.) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

(b) (3 val.) Sendo $b(t) = 6e^{-t}$ calcule a solução da equação que satisfaz $y(0) = 0$ e $y'(0) = 5$.

(c) (1 val.) Indique a função $b(t)$ para a qual $\varphi(t) = te^{5t} + e^{5t} + e^{-t}$ é uma solução particular da equação diferencial.