Cálculo Diferencial e Integral III

1^{o} Semestre 2023/2024

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Resolvidos nº 9

Teorema de Stokes, Potenciais Vectoriais

1. Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y^2, x, z^2)$$

e a superfície S, constituida pela parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 0$, considerando a normal unitária em cada ponto de S, $\overrightarrow{\nu}$, com terceira componente positiva. Calcule o trabalho de F ao longo do bordo de S (com sentido compatível com a orientação de S) utilizando:

(a) A definição de trabalho de F ao longo de um caminho.

(b) O teorema de Stokes.

Resolução:

(a) Vamos calcular o trabalho de F ao longo do bordo de S (que é um integral de linha de 2º tipo). O bordo de S, ∂S, é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano $z = 0$; para ser compatível com $\overrightarrow{\nu}$, deve ter o sentido positivo quando vista de cima. A curva ∂S pode então parametrizada por $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, pelo que:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t, \cos t, 0) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^3 t + \cos^2 t)\, dt \;=\; \pi. \end{aligned}$$

(b) Pelo teorema de Stokes

$$\oint_C F \cdot d\gamma = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS$$

sendo C o bordo de S com orientação compatível com a escolha de $\overrightarrow{\nu}$.

Vamos então calcular o integral de superfície. S pode ser parametrizada por $g(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$ no domínio $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Assim

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = (2x, 2y, 1)$$

Dado que a terceira componente deste vector é positiva (está de acordo com a indicação dada no enunciado) vamos usar este vector como a normal, no cálculo do fluxo de $\operatorname{rot} F$ através de S. Por outro lado

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 1 - 2y)$$

Assim

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS &= \iint_D \operatorname{rot} F\big(g(x,y)\big) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y}\right) dA \\ &= \iint_D (0,0,1-2y) \cdot (2x, 2y, 1)\, dA \;=\; \iint_D (1-2y)\, dA \end{aligned}$$

Mudando para coordenadas polares

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu} dS &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - 2\rho \operatorname{sen}\theta)\rho\, d\theta\, d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho - 2\rho^2 \operatorname{sen}\theta)\, d\theta\, d\rho \;=\; \int_0^1 2\pi\rho\, d\rho \;=\; \pi \end{aligned}$$

2. Usando o teorema de Stokes, calcule

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS$$

nos casos que se seguem.

(a) S o hemisfério superior (isto é, $z > 0$) da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, em que se considera a normal ν com terceira componente positiva e

$$F(x, y, z) \;=\; \big(y,\, -x,\, yx^3\big)\,.$$

(b) S é a parte do plano $x + z = 1$ no interior do cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, em que a normal $\overrightarrow{\nu}$ tem terceira componente positiva e

$$F(x, y, z) \;=\; \big(x,\, -z,\, y\big).$$

(c) S é formada pelo topo e pelos quatro lados (<u>não</u> inclui a base) do cubo de vértices $\big(\pm 1,\, \pm 1,\, \pm 1\big)$, em que $\overrightarrow{\nu}$ é a normal unitária exterior ao cubo e

$$F(x, y, z) \;=\; \big(xyz,\, xy,\, x^2yz\big)$$

Resolução:

(a) Dado que estamos nas condições do teorema de Stokes, pois F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e S é uma superfície orientável, podemos utilizar este teorema.

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS = \oint_\gamma F \cdot d\gamma$$

sendo $\gamma = \partial S$ o bordo de S, orientado de forma compatível com a normal indicada. O caminho γ é a interseção da esfera com o plano $z = 0$, ou seja, $x^2 + y^2 = 4$ percorrida em sentido directo (quando vista de cima); como tal, pode ser parametrizada por

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 0), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Sendo $F(x, y, z) = \big(y,\, -x,\, yx^3\big)$, resulta pois que:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma \\
&= \oint_\gamma \big(y,\, -x,\, yx^3\big) \cdot (dx, dy, dz) \\
&= \int_0^{2\pi} \big(2\operatorname{sen} t,\, -2\cos t,\, 16\operatorname{sen} t\cos^3 t\big) \cdot (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-4\operatorname{sen}^2 t - 4\cos^2 t\big)\, dt \;=\; -8\pi
\end{aligned}$$

(b) Para determinar o bordo de S, calculamos a intersecção da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + z = 1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Projectando ∂S no plano xy, obtém-se a circunferência $x(\theta) = \cos\theta$, $y(\theta) = \operatorname{sen}\theta$, onde $\theta \in [0, 2\pi]$. Da equação do plano (que contém S e ∂S) $z = 1 - x$, pelo que a parametrização do bordo é:

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \operatorname{sen}\theta \\ z(\theta) = 1 - \cos\theta \end{cases} \qquad \text{para } \theta \in [0, 2\pi].$$

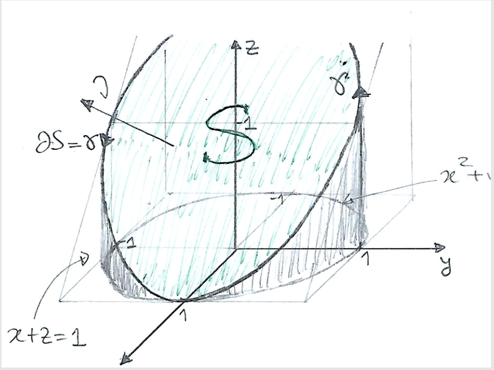

Figura 1: S é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 < 1$ com o plano $x + z = 1$ e $\partial S = \gamma$ é uma elipse.

Temos então que o bordo tem a parametrização

$$\gamma(\theta) = \big(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta,\, 1 - \cos\theta\big), \qquad \text{com} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Note que S é orientável e o seu bordo, γ, tem sentido compatível com a normal dada. Além disso, $F(x, y, z) = (x, -z, y)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS &= \oint_\gamma F \cdot d\gamma \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos\theta,\, \cos\theta - 1,\, \operatorname{sen}\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta,\, \cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-\cos\theta \operatorname{sen}\theta + \cos^2\theta - \cos\theta + \operatorname{sen}^2 t\big)\, d\theta \\
&= -\frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2\theta\, d\theta}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \int_0^{2\pi} d\theta + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta}_{\overset{\shortparallel}{0}} \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

(c) A superfície S é constituída por todas as faces do cubo, excepto a que está contida no plano $z = -1$. O seu bordo, ∂S, é formado por todas as arestas do cubo que estão contidas plano $z = -1$, sendo percorridas no sentido indicado na figura abaixo (e que é compatível com a orientação de S).

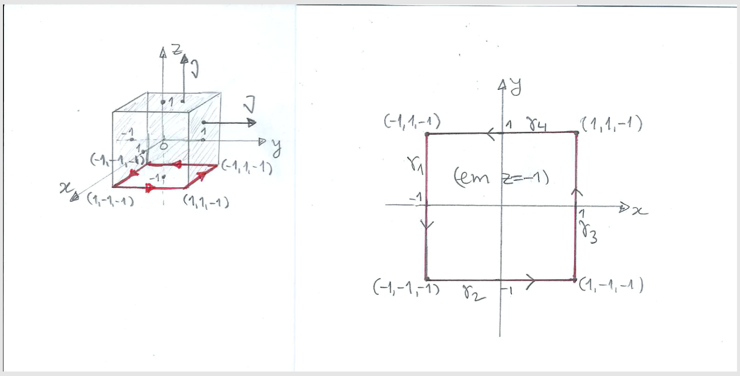

Figura 2: S e o bordo de S.

sendo $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ o bordo de S orientado de forma compatível com a normal indicada. Desta forma, γ é a concatenação dos segmentos de recta que formam as arestas da parte inferior do cubo, e que são parametrizadas por:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (-1,\,-t,\,-1) \qquad \text{com } \ t \in [-1,1];\\
\gamma_2(t) &= (t,\,-1,\,-1) \qquad \text{com } \ t \in [-1,1];\\
\gamma_3(t) &= (1,\,t,\,-1) \qquad \text{com } \ t \in [-1,1];\\
\gamma_4(t) &= (-t,\,1,\,-1) \qquad \text{com } \ t \in [-1,1].
\end{aligned}$$

Sendo $F(x,y,z) = \big(xyz,\, xy,\, x^2yz\big)$ de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e S uma superfície orientável cujo bordo é uma curva de Jordan, resulta do teorema de Stokes que:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma\\
&= \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} F \cdot d\gamma\\
&= \int_{-1}^{1} (-t,t,t)\cdot(0,-1,0)\,dt + \int_{-1}^{1} (t,-t,t^2)\cdot(1,0,0)\,dt\\
&\quad + \int_{-1}^{1} (-t,t,-t)\cdot(0,1,0)\,dt + \int_{-1}^{1} (t,-t,-t^2)\cdot(-1,0,0)\,dt\\
&= \int_{-1}^{1} \underbrace{(-t+t+t-t)}_{\substack{\shortparallel\\ 0}}\,dt \;=\; 0
\end{aligned}$$

3. Utilizando o teorema de Stokes, transforme o integral $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS$ num integral de linha (trabalho de F ao longo de um caminho) e calcule-o, sendo:

(a) S a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $y \geq 0$, $\overrightarrow{\nu}$ a normal com segunda componente positiva e

$$F(x,y,z) \ = \ (y, x, x^2)$$

(b) S a superfície

$$\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ 0 \leq z \leq 1 \ , \ x^2 + y^2 = 1 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0\Big\},$$

$\overrightarrow{\nu}$ a normal com componente em x positiva e

$$F(x,y,z) \ = \ (0, x, 0)$$

Resolução:

(a) Pelo teorema de Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS \ = \ \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

em que ∂S é o bordo da superfície S orientado de forma compatível com a escolha da normal. Neste caso, ∂S é a interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano $y = 0$, ou seja, é a curva $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, com o sentido directo quando vista do ponto $(0, 2, 0)$.

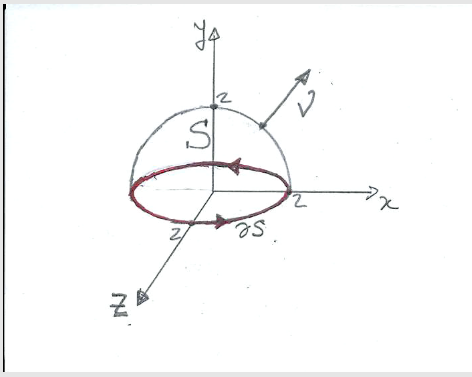

Figura 3: S e o bordo de S.

Assim (ver figura) uma parametrização de ∂S é

$$\gamma(\theta) \ = \ (2\cos\theta, 0, -2\operatorname{sen}\theta)\,, \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Sendo $F(x,y,z) \ = \ (y, x, x^2)$, temos então:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS \ &= \ \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma \\
&= \ \int_0^{2\pi} \big(0, 2\cos\theta, 4\cos^2\theta\big) \cdot (-2\operatorname{sen}\theta, 0, -2\cos\theta)\ d\theta \\
&= \ -8 \int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\theta \ = \ 0
\end{aligned}$$

(b) Pelo teorema de Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS \;=\; \oint_{\partial S} F \cdot dr$$

em que C é o bordo da superfície S orientada de forma compatível com a escolha da normal. S é a parte da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ com $x > 0$, $y > 0$ e $0 < z < 1$:

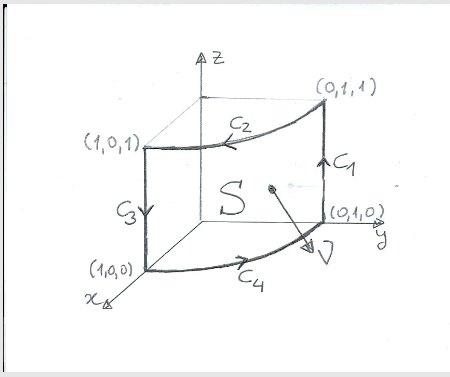

Figura 4: S e o bordo de S.

Neste caso, o bordo de S é uma curva seccionalmente regular constituida por 4 caminhos regulares, para os quais vamos usar as parametrizações:

$$\begin{array}{rcllll} g_1(z) & = & (0,1,z), & z \in [0,1] & \text{(de } C_1); \\ g_2(t) & = & (\cos t, \operatorname{sen} t, 1), & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \text{(de } -C_2); \\ g_3(z) & = & (1,0,z), & z \in [0,1] & \text{(de } -C_3); \\ g_4(t) & = & (\cos t, \operatorname{sen} t, 0), & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \text{(de } C_4). \end{array}$$

Para o campo vectorial $F(x,y,z) = (0,x,0)$, temos que

$$\int_{\partial S} F \cdot d\gamma \;=\; \int_{\partial S} x\, dy$$

Desta forma, e calculando os integrais de linha de F ao longo dos caminhos C_i, $i = 1,2,3,4$, que verificam $\partial S = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$:

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} x\,dy &= \int_0^1 0\,dz = 0 \\
\int_{C_3} x\,dy &= -\int_0^1 0\,dz = 0 \\
\int_{C_2} x\,dy &= -\int_0^{\pi/2} \cos t\,(\operatorname{sen} t)'\,dt = -\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \\
\int_{C_4} x\,dy &= \int_0^{\pi/2} \cos t\,(\operatorname{sen} t)'\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = -\int_{C_2} x\,dy
\end{aligned}$$

Em conclusão, e tendo em conta que os integrais ao longo de C_2 e C_4 cancelam:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\,dS = \sum_{k=1}^{4} \oint_{C_k} F \cdot d\gamma = \sum_{k=1}^{4} \int_{C_i} x\,dy = 0.$$

4. Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_C F \cdot d\mathbf{r}$ onde C é o triângulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, percorrido no sentido positivo quando visto do ponto $(5,5,5)$ e

$$F(x,y,z) = \left(x + y^2,\, y + z^2,\, z + x^2\right).$$

Resolução:

Pelo teorema de Stokes temos que

$$\oint_C F \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\,dS$$

sendo S uma superfície cujao bordo é C e $\overrightarrow{\nu}$ a normal a S compatível com o sentido indicado para C. Sendo que um vector normal ao plano que contém os três vértices do triângulo é $(1,1,1)$, a equação deste plano é

$$(x-1, y, z) \cdot (1,1,1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y + z = 1.$$

Consideramos a seguinte parametrização do triângulo:

$$g(x,y) = (x, y, 1 - x - y),$$

com g está definida na projecção do triângulo sobre o plano xy:

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 < x < 1,\, 0 < y < 1 - x\right\}$$

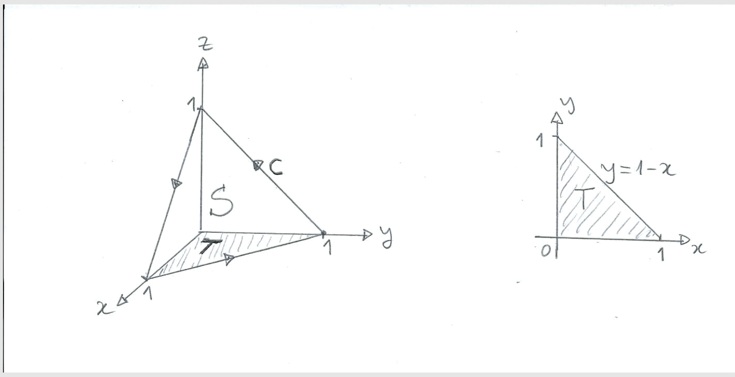

Figura 5: A curva C, uma superfície plana, S, cujo bordo é C, e o domínio de g, T.

A orientação associada a esta parametrização é

$$\overrightarrow{n} \;=\; \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \;=\; (1,1,1)\,,$$

sendo compatível com o sentido de C; note que em caso contrário bastaria tomar $-\overrightarrow{n}$ no lugar de $\overrightarrow{n}$, no cálculo que se segue.

Por outro lado:

$$\operatorname{rot} F \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y^2 & y+z^2 & z+x^2 \end{vmatrix} \;=\; (-2z,-2x,-2y) \;=\; -2(z,x,y)$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \oint_C F\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{rot} F\cdot \nu\, dS \\ &= \iint_T -2(1-x-y,x,y)\cdot(1,1,1)\,dA \\ &= -2\iint_T \underbrace{(1-x-y+x+y)}_{\overset{\shortparallel}{1}}\,dA \\ &= -2\iint_T dA \;=\; -2\ \mathrm{Vol}_2(T) \;=\; -2\left(\tfrac{1}{2}\right) \;=\; -1 \end{aligned}$$

5. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial

$$H(x,y,z) = \left(\frac{z}{x^2+z^2} + x,\, y,\, \frac{-x}{x^2+z^2} + z\right).$$

ao longo da elipse definida por

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 2(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1,\; z = 0\right\}$$

percorrida no sentido horário quando observada do ponto $(0,0,100)$.

Resolução:

Uma superfície S tal que $\partial S = C$ é

$$S \;=\; \left\{(x,y,z) \;:\; 2(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} \le 1 \;,\; z = 0\right\}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} H \;&=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{z}{x^2+z^2} + x & y & \frac{-x}{x^2+z^2} + z \end{vmatrix} \\
&=\; \left(0,\; -\frac{-(x^2+z^2) + 2x^2}{(x^2+z^2)^2} \;+\; \frac{(x^2+z^2) - 2z^2}{(x^2+z^2)^2},\; 0\right) \\
&=\; \left(0,\; \frac{z^2 - x^2}{(x^2+z^2)^2} \;+\; \frac{x^2 - z^2}{(x^2+z^2)^2},\; 0\right) \\
&=\; (0,\,0,\,0) \;=\; \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Pelo teorema de Stokes, o trabalho de H ao longo de C é

$$W = \oint_C H \cdot d\mathbf{r} \;=\; \iint_S \underbrace{\operatorname{rot} H}_{\overset{\shortparallel}{\mathbf{0}}} \cdot\, \nu \; dS \;=\; 0.$$

Note que sendo nulo o rotacional de H, o cálculo da normal a S torna-se obviamente desnecessário.

6. Seja S a superfície parametrizada por

$$g(u,v) \;=\; \left(u,\, v,\, 2 - u^2 - v^2\right) \qquad \text{com } (u,v) \;\in\; B \;=\; \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; u^2 + v^2 < 1\right\}$$

Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$F(x,y,z) = (y, 0, x+y)$$

através de S na direção da normal com terceira componente positiva, utilizando

(a) a definição de fluxo;

(b) o teorema de Stokes.

Resolução:

(a) O fluxo do rotacional do campo vectorial F é o integral $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$. Temos que

$$\operatorname{rot} F \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 0 & x+y \end{vmatrix} \;=\; (1,-1,-1).$$

Por outro lado, uma normal à superfície (com terceira componente positiva) é

$$\overrightarrow{n} \;=\; \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} \;=\; (2u, 2v, 1)$$

Assim sendo,

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS \;=\; \iint_S (1,-1,-1)\cdot(2u,2v,1)\, dS \;=\; \iint_B (2u-2v-1)\, du\, dv$$

Efectuando a mudança para coordenadas polares $u = \rho\cos\theta$, $u = \rho \operatorname{sen}\theta$, e como B é dado por $(\rho,\theta) \in \,]0,1[\, \times \,]0,2\pi[$:

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu} dS \;&=\; \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2\rho\cos\theta - 2\rho\operatorname{sen}\theta - 1)\,\rho\, d\theta\, d\rho \\ &=\; \int_0^1 \left(2\rho^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta}_{\overset{\shortparallel}{0}} + 2\rho^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \rho \int_0^{2\pi} d\theta \right) d\rho \\ &=\; \int_0^1 (-2\pi\rho)\, d\rho \;=\; -\pi\rho^2\Big|_0^1 \;=\; -\pi. \end{aligned}$$

(b) Para aplicar o teorema de Stokes necessitamos de uma parametrização do bordo de S cujo sentido é compatível com a orientação da superfície. Sendo ∂B a circunferência $u^2+v^2=1$, tomando $u(t) = \cos t$ e $v(t) = \operatorname{sen} t$, ou seja,

$$\gamma(t) = \big(\cos t, \operatorname{sen} t\big) \qquad t \in [0,2\pi],$$

e tendo em conta que $\overrightarrow{n}$ — a orientação de S segundo a qual se pretende calcular o fluxo — coincide com a normal induzida pela parametrização, então o bordo de S é o caminho

$$\begin{aligned} \Gamma(t) \;&=\; g\circ\gamma(t) \;=\; g\big(\cos t,\, \operatorname{sen} t\big) \\ &=\; \big(\cos t,\, \operatorname{sen} t,\, 2-\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\big) \;=\; \big(\cos t,\, \operatorname{sen} t,\, 1\big), \qquad t\in[0,2\pi]. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS &= \int_\Gamma F \cdot d\Gamma \\
&= \int_0^{2\pi} \big(\operatorname{sen} t,\, 0,\, \cos t + \operatorname{sen} t\big) \cdot \big(-\operatorname{sen} t,\, \cos t,\, 0\big)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2 t \, dt \;=\; -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)\, dt \;=\; -\pi
\end{aligned}$$

7. Considere o campo vectorial

$$G(x, y, z) \;=\; \big(yz,\, -xz,\, z^2\big)$$

e a superfície

$$S \;=\; \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 = 1 + z \;,\; 0 < z < 1\Big\}.$$

Calcule o fluxo do rotacional de G através de S, segundo a normal com terceira componente negativa, usando:

(a) o teorema de Stokes;

(b) o teorema da divergência.

Resolução:

(a) A superfície S é dada por $z = x^2 + y^2 - 1$, com

$$0 < z < 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 < x^2 + y^2 - 1 < 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1 < x^2 + y^2 < 2.$$

Podemos pois parametrizá-la por

$$g(x, y) \;=\; \big(x,\, y,\, x^2 + y^2 - 1\big),$$

com g definida na coroa circular

$$A \;=\; \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\Big\}.$$

Um vector normal a S é

$$\vec{n} \;=\; \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} \;=\; \big(-2x,\, -2y,\, 1\big)$$

Como necessitamos da normal a S com terceira componente negativa, tomamos $-\overrightarrow{n}$. Em consequência, para obter uma parametrização para o bordo de S que seja compatível com esta orientção precisamos que a fronteira de ∂A, que designamos por γ, seja percorrida no sentido inverso (ver figura).

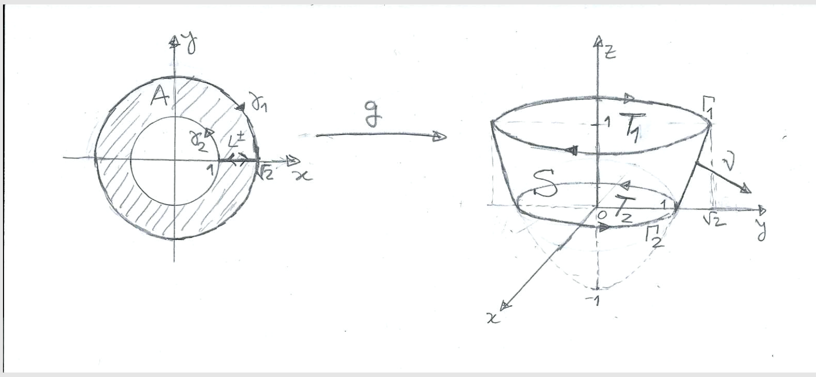

Figura 6: Determinação do bordo da superfície S.

Considerando

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= \big(\sqrt{2}\cos t,\, -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t\big), \qquad t \in [0, 2\pi],\\
\gamma_2(t) &= \big(\cos t,\, \mathrm{sen}\, t\big), \qquad t \in [0, 2\pi].
\end{aligned}$$

Resulta então que o bordo de S é $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, onde

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(t) &= g \circ \gamma_1(t) = \big(\sqrt{2}\cos t,\, -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t,\, 1\big), \qquad t \in [0, 2\pi],\\
\Gamma_2(t) &= g \circ \gamma_2(t) = \big(\cos t,\, \mathrm{sen}\, t,\, 0\big), \qquad t \in [0, 2\pi].
\end{aligned}$$

De acordo com o Teorema de Stokes, e notando que $G = 0$ em Γ_2, temos:

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathrm{rot}\, G \cdot \nu \, dS &= \int_\Gamma G \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} G \cdot d\mathbf{r} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} G \cdot d\mathbf{r}}_{\overset{\shortparallel}{0}}\\
&= \int_0^{2\pi} \big(-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t,\, -\sqrt{2}\cos t,\, 1\big) \cdot \big(-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t,\, -\sqrt{2}\cos t,\, 0\big)\, dt\\
&= \int_0^{2\pi} \big(2\,\mathrm{sen}^2\, t + 2\cos^2 t\big)\, dt\\
&= \int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi.
\end{aligned}$$

(b) Uma vez que o teorema da divergência só se aplica a superfícies que são fronteira de domínios regulares, acrescentamos à superfície S os círculos

$$\begin{aligned} T_1 &= \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; z=0 \text{ e } x^2+y^2\leq 2\Big\} \\ T_2 &= \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; z=1 \text{ e } x^2+y^2\leq 1\Big\}. \end{aligned}$$

Em linguagem informal, podemos dizer que T_1 é a "tampa" do sólido D e T_2 o seu "fundo" (ver figura da alínea **(a)**), onde

$$D = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2<1+z \text{ e } 0<z<1\Big\}.$$

Assim sendo, $\partial D = T_1\cup T_2\cup S$. Sendo

$$\operatorname{rot} G = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z^2 \end{vmatrix} = (x,y,-2z):$$

aplicamos agora o teorema da divergência ao campo vectorial $\operatorname{rot} G$, por forma a verificarmos que o fluxo deste campo através de ∂D é, de facto, nulo:

$$\iint_{\partial D} \operatorname{rot} G\cdot\nu\, dS = \iiint_D \underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{rot} G)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\, dV = 0.$$

Por outro lado, como $\partial D = T_1\cup T_2\cup S$:

$$\iint_S \operatorname{rot} G\cdot\nu\, dS + \iint_{T_1} \operatorname{rot} G\cdot\nu\, dS + \iint_{T_2} \operatorname{rot} G\cdot\nu\, dS = \iint_{\partial D} \operatorname{rot} G\cdot\nu\, dS = 0.$$

Utilizando

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= (x,y,1) \qquad \text{definida em } D_1=\{(x,y): x^2+y^2<2\}, \\ g_2(x,y) &= (x,y,0) \qquad \text{definida em } D_2=\{(x,y): x^2+y^2<1\}, \end{aligned}$$

como parametrizações de T_1 e T_2, respectivamente, resulta assim que:

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} G\cdot\nu\, dS &= -\iint_{T_1} \operatorname{rot} G\cdot\nu\, dS - \iint_{T_2} \operatorname{rot} G\cdot\nu\, dS \\ &= -\iint_{D_1} (x,y,-2)\cdot(0,0,1)\, dA - \iint_{D_2} \underbrace{(x,y,0)\cdot(0,0,-1)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\, dA \\ &= 2\iint_{D_1} dA = 2\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 = 4\pi. \end{aligned}$$

8. Verifique que o campo $F(x, y, z) = (-y, z, 3x)$ tem um potencial vectorial e calcule um potencial vectorial para F.

Resolução:

Para que exista tal campo é necessário que $\operatorname{div} F = 0$. Então

$$\operatorname{div} F \;=\; \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(3x) \;=\; 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}^3,$$

pelo que se confirma que existe um campo vectorial $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (dado que as componentes de F são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, sendo $\mathbb{R}^3$ um conjunto em estrela) tal que

$$\operatorname{rot} G = F. \tag{1}$$

Para determinar $G = (G_1, G_2, G_3)$, determinamos uma solução da equação (1):

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} G \;&=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} \\
&=\; \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \;=\; (-y, z, 3x).
\end{aligned}$$

Assim, vamos calcular funções G_1, G_2 e G_3 tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = -y \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = z \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = 3x. \end{cases}$$

Sabemos que existe uma solução deste sistema tal que uma das componentes, G_1, G_2 ou G_3, é nula. Podemos considerar, por exemplo, $G_1(x, y, z) \equiv 0$, e assim

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = -y \\ \frac{\partial G_3}{\partial x} = -z \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} = 3x. \end{cases}$$

Integrando a terceira e a segunda equações em ordem a x obtém-se:

$$\begin{aligned}
G_2(x, y, z) \;&=\; \int 3x\, dx + A_1(y, z) \;=\; \frac{3}{2}x^2 + A_1(y, z) \\
G_3(x, y, z) \;&=\; -\int z\, dx + A_2(y, z) \;=\; -xz + A_2(y, z).
\end{aligned}$$

Substituindo na primeira equação, tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(- xz + A_2(y,z)\big) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3}{2}x^2 + A_1(y,z)\right) \;=\; -y\,,$$

ou seja,

$$\frac{\partial A_2(y,z)}{\partial y} - \frac{\partial A_1(y,z)}{\partial z} \;=\; -y\,. \tag{2}$$

Precisamos pois de determinar funções $A_1(y,z)$ e $A_2(y,z)$ que verifiquem a equação (2). Dado que temos uma equação e duas incógnitas, existem certamente soluções tais que $A_1(y,z) \equiv 0$ (por exemplo). Desta forma, resta determinar $A_2(y,z)$ tal que

$$\frac{\partial A_2(y,z))}{\partial y} \;=\; -y.$$

Primitivando em ordem a y, obtém-se

$$A_2(y,z) = \int (-y)\,dy + B(z) = -\frac{y^2}{2} + B(z)\,.$$

Podemos ainda tomar $B(z) \equiv 0$. Em conclusão,

$$G_2(x,y,z) = \frac{3}{2}x^2, \qquad G_3(x,y,z) = -xz - \frac{y^2}{2}\,,$$

ou seja,

$$G(x,y,z) = \left(0, \frac{3}{2}x^2, -xz - \frac{y^2}{2}\right)$$

Observações. Note que o problema pede *apenas um* potencial vectorial e não *todos* os possíveis potenciais vectoriais, de F.

Neste tipo de problemas, pode ser boa ideia verificar, no final, que $\operatorname{rot} F = G$ (fica como exercício para o aluno).

9. Considere a superfície definida por

$$S \;=\; \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2=1\,,\; z>0\Big\}$$

orientada segundo a normal unitária $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ tal que $\nu_3>0$.

(a) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de

$$H(x,y,z) \;=\; \big(xz,\; yz,\; -z^2+1\big)$$

através de S (no sentido de ν).

(b) Calcule o fluxo de

$$F(x,y,z) \;=\; \big(x+y^3z,\; y,\; z\big)$$

através de S (no sentido de ν).

Resolução:

(a) H está definida e é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ (um conjunto em estrela) e a sua divergência é

$$\operatorname{div} H(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(xz)+\frac{\partial}{\partial y}(yz)+\frac{\partial}{\partial z}(-z^2+1)=z+z-2z=0 \qquad \text{em } \mathbb{R}^3.$$

Assim sendo existe (pelo menos um) potencial vectorial $\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot}\Phi=H$.

Sendo $\mathbb{R}^3$ um conjunto em estrela, fazemos o cálculo de um potencial vectorial pela fórmula integral:

$$\begin{aligned}
\Phi(x,y,z) \;&=\; \int_0^1 H(tx,ty,tz)\times(tx,ty,tz)\,dt \\
&=\; \int_0^1 \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ t^2xz & t^2yz & -t^2z^2+1 \\ tx & ty & tz \end{vmatrix}\,dt \\
&=\; \int_0^1 \Big(2t^3yz^2-ty,\; -2t^3xz^2+tx,\; 0\Big)\,dt \\
&=\; \Big(yz^2,\; -xz^2,\; 0\Big)\underbrace{\int_0^1 2t^3\,dt}_{\substack{\parallel\\ 1/2}} \;+\; \Big(-\,y,\; x,\; 0\Big)\underbrace{\int_0^1 t\,dt}_{\substack{\parallel\\ 1/2}} \\
&=\; \frac{1}{2}\Big(\,y\,(z^2-1)\,,\; x\,(1-z^2)\,,\; 0\Big).
\end{aligned}$$

Parametrizando o bordo de S, ∂S, por

$$\gamma(t) \;=\; \big(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta,\, 0\big) \qquad \theta \in [0, 2\pi],$$

e aplicando o teorema de Stokes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\iint_S H \cdot \nu \, dS \;&=\; \iint_S \operatorname{rot} \Phi \cdot \nu \, dS \;=\; \int_\gamma \Phi \cdot d\gamma \\
&=\; \int_0^{2\pi} \Phi\big(\gamma(\theta)\big) \cdot \gamma'(\theta) \, d\theta \\
&=\; \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(-\operatorname{sen}\theta,\, \cos\theta,\, 0\big) \cdot \big(-\operatorname{sen}\theta,\, \cos\theta,\, 0\big) \, d\theta \\
&=\; \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \big) \, d\theta \;=\; \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \;=\; \pi
\end{aligned}$$

(b) Note que, neste caso, $\operatorname{div} F = 3$ e, por isso, não há potencial vectorial para F. No entanto, e tendo em conta que $\operatorname{div} F$ é constante, é proveitoso usar o teorema da divergência. Seja E o hemisfério norte da bola de raio centrada na origem, isto é, $E = \big\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1,\, z > 0\big\}$. Então

$$\iiint_E \operatorname{div} F \, dV \;=\; \iiint_E 3 \, dV \;=\; 3\,\mathsf{Vol}_3(E) \;=\; 3\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2\pi.$$

Por outro lado, sendo a fronteira de E, $\partial E = S + T$, onde $T = \big\{(x, y, 0) : x^2 + y^2 < 1\big\}$, o fluxo através de T é também fácil de calcular:

$$\iint_T F \cdot \nu \, dS \;=\; \iint_T \big(x + y^2 z,\, y,\, z\big) \cdot (0, 0, -1) \, dS \;=\; \iint_T -z \, dS = 0$$

(pois $z = 0$ em T).

Finalmente, pelo teorema da divergência:

$$\begin{aligned}
2\pi \;&=\; \iiint_E \operatorname{div} F \, dV \\
&=\; \iint_S F \cdot \nu \, dS \;+\; \underbrace{\iint_T F \cdot \nu \, dS}_{=0} \;=\; \iint_S F \cdot \nu \, dS.
\end{aligned}$$

10. Seja C um caminho fechado e simples que pertence ao plano $x+y+z=1$ e é percorrido no sentido directo quando visto do ponto $(0,0,10)$. Mostre que o integral de linha

$$\oint_C zdx - 2xdy + 3ydz$$

depende apenas da área da região do plano $x+y+z=1$ delimitada por C.

Resolução:

Seja S a região interior à curva C no plano

$$x+y+z=1 \qquad \Leftrightarrow \qquad z=1-x-y.$$

Vamos parametrizar S por

$$g(x,y) \;=\; (x,y,1-x-y), \qquad (x,y)\in P\subset\mathbb{R}^2,$$

onde P obtém-se da projecção de S no plano coordenado $z=0$, ou seja,

$$P \;=\; \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y,1-x-y)\in S\Big\}.$$

A orientação associada a esta parametrização,

$$\overrightarrow{n} \;=\; \frac{\partial g}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial y} \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \;=\; (1,1,1), \qquad \nu \;=\; \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|} \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

é compatível com o sentido prescrito para C. Por outro lado, considerando o campo dado, $F(x,y,z)=(z,-2x,3y)$:

$$\operatorname{rot} F \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & -2x & 3y \end{vmatrix} \;=\; (3,1,-2).$$

Pelo teorema de Stokes

$$\begin{aligned} \oint_C zdx-2xdy+3ydz \;&=\; \oint_C F\cdot d\mathbf{r} \;=\; \iint_S \operatorname{rot} F\cdot\nu\,dS \\ &=\; \iint_S (3,1,-2)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\,dS \;=\; \iint_S \frac{2}{\sqrt{3}}\,dS \;=\; \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Area}(S). \end{aligned}$$

Comentário: note que se a curva fosse percorrida no sentido contrário ao que foi prescrito, o valor do integral seria $-\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Area}(S) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Vol}_2(S)$. O integral depende apenas do sentido da curva e da área da região do plano delimitada por C; para além desta dependência, o integral não é função nem da "forma" da curva nem da sua posição no plano.

11. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície e $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 ortogonal a M (ou seja, $H(x) \in T_x^{\perp} M$ para todo o $x \in M$). Mostre que rot H é um campo vectorial tangente a M em qualquer ponto $p \in M$.

Resolução:

Se $\operatorname{rot} H$ não fosse tangente a M em algum ponto $p \in M$ então teríamos

$$\operatorname{rot} H(p) \cdot \nu(p) \; > \; 0$$

para uma certa normal unitária $\nu(\mathbf{x})$ a M, localmente definida. Uma vez que H é de classe C^1, e portanto $\operatorname{rot} H$ é uma função contínua, existiria um conjunto aberto $U \ni p$ tal que $\operatorname{rot} H(x) \cdot \nu(\mathbf{x}) > 0$ para $x \in U \cap M$. Tomando um caminho simples e fechado γ em $U \cap M$, com sentido compatível com ν, teríamos então, pelo teorema de Stokes

$$\int_\gamma H \cdot d\gamma \;\; = \;\; \int_S \operatorname{rot} H \cdot \nu \, dS \;\; > \;\; 0,$$

onde $S \subset U \cap M$ é a região de M com bordo γ.

Por outro lado, e uma vez que H é ortogonal a M, temos

$$\oint_\gamma H \cdot d\gamma \;\; = \;\; \int_a^b H\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t) \, dt \;\; = \;\; 0$$

pois $\gamma'(t)$ é sempre um vector tangente a M para qualquer parametrização $\gamma : [a, b] \to M$ de um caminho em M. Tendo deduzido uma contradição, concluimos que $\operatorname{rot} H$ é necessariamente tangente à superfície M em todos os pontos da mesma.