

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/2024

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas nº 9

Teorema de Stokes e Potenciais Vectoriais

1 Exercícios Propostos

1. Considere o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (y, z, x)$$

e a superfície S igual ao hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$, orientada de forma a que o seu vector normal tem segunda componente positiva. Calcule o fluxo do $\text{rot } F$ através de S utilizando

- (a) A definição de fluxo.
(b) O teorema de Stokes.

2. Use o teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{rot } F \cdot \nu \, dS$ sendo

- (a) S é a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que se encontra no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, em que se considera a normal ν com terceira componente positiva e

$$F(x, y, z) = (x^2 z^2, y^2 z^2, xyz).$$

- (b) S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, em que se considera a normal ν com primeira componente positiva e

$$F(x, y, z) = (e^{xy} \cos z, (x^2 y^2 + 1)z, -y).$$

- (c) S a superfície parametrizada por $g(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$, $u > 0$, $v > 0$, $u + v < 1$, sendo ν a normal com terceira componente positiva e

$$F(x, y, z) = (y, -x^2, z).$$

3. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$, em que:

- (a) C é a curva obtida a partir da intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $y = z$, percorrida no sentido anti-horário quando vista de cima e

$$F(x, y, z) = (y + z, -z, y)$$

- (b) C é a curva de intersecção do plano $x+z=5$ com o cilindro $x^2+y^2=9$, percorrida no sentido directo quando vista de cima e

$$F(x, y, z) = (xy, 2z, 3y)$$

- (c) C é o triângulo de vértices $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$, orientado no sentido anti-horário quando visto da origem para o primeiro octante, e

$$F(x, y, z) = (x - z, y - x, z - xy).$$

4. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial F ao longo da curva C , sendo:

- (a) C o bordo da superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1, 0 < x < 1 \right\},$$

orientada com uma normal à sua escolha, e

$$F(x, y, z) = (z, -xy, -xz).$$

- (b) C é a curva parametrizada por

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cos(2t)) \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

e F o campo vectorial dado por

$$F(x, y, z) = (x^2 - y, y^2 - x, y^2 - x^2 + z^3).$$

5. Considere a superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2 ; 1 < y < 4 \right\},$$

orientada com a normal ν cuja segunda componente é positiva.

- (a) Sabendo que S tem densidade superficial de massa dada por $\sigma(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + z^2)}$ calcule a massa total de S .
 (b) Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (2x, -y, -z)$$

através de S no sentido da normal ν .

6. Obtenha um potencial vectorial dos campos abaixo.

- (a) $F(x, y, z) = (yz, -xz, xy - 2)$
 (b) $F(x, y, z) = (y \sin z, y \sin z, \cos z)$

7. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2, 1 < y < 4\},$$

orientada segundo a normal unitária $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ tal que $n_y < 0$.

- (a) Calcule a área de S .
- (b) Calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (-xy, y^2, -yz)$ através de S no sentido de \vec{n} , utilizando o teorema da divergência.
- (c) Calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (-xy, y^2, -yz)$ através de S no sentido de \vec{n} , utilizando o teorema de Stokes.

8. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2 ; x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

- (a) Parametrize a superfície S .
- (b) Calcule a área de S .
- (c) Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = (-y, x, z)$ e calcule o trabalho

$$W = \int_{\partial S} F \cdot dr$$

no sentido horário quando visto do ponto $(10, 10, 10)$, usando o teorema de Stokes.

- (d) Determine o fluxo de $G(x, y, z) = (x, -y^4 - y, 4y^3z + 2)$ através de S no sentido da normal com terceira componente positiva, usando o teorema da divergência.

9. Sejam $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e V um domínio nas condições do Teorema de Gauss. Mostre que o fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = \frac{1}{r^3} \vec{r}$$

através da superfície ∂V é igual a zero quando a origem está no exterior de V . Qual será o valor desse fluxo quando V contiver a origem no seu interior?

2 Soluções

- 1. $-\pi$
- 2. (a) 0
(b) -2π
(c) $-\frac{5}{6}$

3. (a) -2π
(b) 9π
(c) $\frac{3}{2}$
4. (a) 0
(b) 0
5. (a) 33π
(b) -15π
6. (a) $\left(2y - \frac{x}{2}(y^2 + z^2), 0, \frac{y^2z}{2}\right)$ (por exemplo)
(b) $(0, (x + y) \cos z, -xy \operatorname{sen} z)$ (por exemplo)
7. (a) $\frac{\pi}{6}(17^{3/2} - 5^{3/2})$
(b) -63π
(c) -63π
8. (a) $g(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$, definida em $U = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1 \wedge u > 0 \wedge v > 0\}$
(b) $\frac{\pi}{24}(5\sqrt{5} - 1)$
(c) $-\frac{\pi}{2}$
(d) $\frac{\pi}{2}$
9. 4π