TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2026/2027

Cursos: LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Resolvidos nº 2

Equações Diferenciais Exactas e Redutíveis a Exactas

1. Mostre que as seguintes equações são exactas e resolva-as:

$$(\mathbf{a})\ (xe^y + y - x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy - e^y - x \qquad (\mathbf{b})\ 2y^3 + 2 + 6xy^2\frac{dy}{dx} = 0$$

Resolução:

(a) Note-se em primeiro lugar que a equação não é linear nem separável. Resta-nos investigar se será uma equação exacta (ou redutível a exacta). A equação pode ser escrita na forma

$$-2xy + e^y + x + (xe^y + y - x^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

Definindo

$$M(x,y) = -2xy + e^y + x \quad , \quad N(x,y) = xe^y + y - x^2$$

Dado que ambas as funções são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x + e^y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

concluimos que se trata de uma equação exacta, pelo que existe $\Phi(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla\Phi = (M,N)$ e $\Phi(x,y) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial.

- **Cálculo de Φ**

  Atendendo a que $\nabla\Phi = (M,N)$ tem-se que:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -2xy + e^y + x \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x,y) = -x^2y + xe^y + \frac{x^2}{2} + c(y)$$

  Por outro lado

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = N \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(-x^2y + xe^y + \frac{x^2}{2} + c(y)\Big) = xe^y + y - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad c'(y) = y$$

  tem-se assim que $c(y) = \frac{y^2}{2} + c$ e

$$\Phi(x,y) = -x^2y + xe^y + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

- **Cálculo da solução geral da equação**
  Para M, N e Φ definidas acima

$$\begin{aligned} M(x,y)+N(x,y)y'=0 &\Leftrightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\Big(\Phi(x,y)\Big)=0 \\ &\Leftrightarrow \Phi(x,y)=c_2 \\ &\Leftrightarrow x^2y+xe^y+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=k \end{aligned}$$

  Ou seja as curvas de nível da função $\Phi(x,y)$ definem implicitamente a solução geral da equação diferencial.

(c) Note-se em primeiro lugar que a equação não é linear mas é separável. Vamos resolvê-la como equação exacta mas aconselha-se o aluno a resolvê-la também como equação separável. Resta-nos investigar se será uma equação exacta (ou redutível a exacta). Definindo

$$M(x,y)=2y^3+2 \quad , \quad N(x,y)=6xy^2$$

Dado que ambas as funções são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, e

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6y^2=\frac{\partial N}{\partial x}$$

concluimos que se trata de uma equação exacta, pelo que existe $\Phi(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, tal que $\nabla\Phi=(M,N)$ e $\Phi(x,y)=C$ define implicitamente a solução da equação diferencial.

- **Cálculo de Φ**
  Atendendo a que $\nabla\Phi=(M,N)$ tem-se que:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=2y^3+2 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(x,y)=2xy^3+2x+c(y)$$

  Por outro lado

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=N \quad \Leftrightarrow \quad 6xy^2+c'(y)=6xy^2 \quad \Leftrightarrow \quad c'(y)=0$$

  tem-se assim que $c(y)=c$ e

$$\Phi(x,y)=2xy^3+2x+c \quad , \quad c\in\mathbb{R}$$

- **Cálculo da solução geral da equação**
  Para M, N e Φ definidas acima

$$\begin{aligned} M(x,y)+N(x,y)y'=0 &\Leftrightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\Big(\Phi(x,y)\Big)=0 \\ &\Leftrightarrow \Phi(x,y)=c \\ &\Leftrightarrow 2xy^3+2x=k \end{aligned}$$

Ou seja as curvas de nível da função $\Phi(x,y)$ definem implicitamente a solução geral da equação diferencial. Dado que neste caso se consegue resolver a equação em ordem a y, obtemos a forma explícita da solução da equação diferencial

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{k-2x}{2x}} \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

2. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2+2x}$$

a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.

c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

Resolução:

(a) A equação pode ser escrita na forma

$$y + (4y^2+2x)\frac{dy}{dx} = 0$$

Fazendo

$$M(x,y) = y \qquad , \qquad N(x,y) = 4y^2+2x$$

é óbvio que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2$$

pelo que teremos que investigar a existência de um factor integrante. Vamos averiguar se existirá $\mu(y)$ (como sugerido), tal que a equação

$$\mu(y)y + \mu(y)\left(4y^2+2x\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, isto é verifica

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(y)y\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(y)\left(4y^2+2x\right)\Big)$$

Efectuando as derivadas

$$\mu'(y)y + \mu(y) = 2\mu(y)$$

e para $y \neq 0$ obtemos

$$\mu'(y) = \frac{1}{y}\mu(y)$$

pelo que

$$\mu(y) = y$$

é um factor integrante da equação.

(b) Pela alínea (a) a equação

$$y^2 + (4y^3 + 2xy)y' = 0$$

é exacta, pelo que existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verifcando

$$\nabla\Phi(x, y) = (y^2, 4y^3 + 2xy)$$

e $\Phi(x, y) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial. Para calcular Φ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = y^2 \;\Leftrightarrow\; \Phi(x, y) = xy^2 + c(y)$$

e

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 4y^3 + 2xy \;\Leftrightarrow\; 2xy + c'(y) = 4y^3 + 2xy \;\Leftrightarrow\; c(y) = y^4 + c$$

e finalmente

$$\Phi(x, y) = xy^2 + y^4 = C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial. Dado que $y(1) = 1$, tem-se que $C = 2$. Por outro lado $N(1, 1) = 6 \neq 0$, o Teorema da Função Implícita garante a existência de solução única do PVI, definida por

$$xy^2 + y^4 - 2 = 0 \tag{1}$$

para x numa vizinhança de $x_0 = 1$.

(c) Para calcular o intervalo máximo de solução, note-se que, resolvendo a equação (1) em ordem a y

$$y(x) = \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + 8}}{2}}$$

(onde as escolhas dos ramos das raízes foi baseado no facto de os dados iniciais $x_0 = 1 > 0$ e $y_0 = 1 > 0$). Dado que $x^2 + 8 > 0$ e

$$-x + \sqrt{x^2 + 8} > 0 \qquad , \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

tem-se que o intervalo máximo de solução é $\mathbb{R}$.

3. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^2\left(\dfrac{1}{x} + \log x\right) + 2y \log x \dfrac{dy}{dx} \;=\; 0 \\ \\ y(e) \;=\; -1 \end{cases}$$

Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

Resolução:

Trata-se de uma equação da forma

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0,$$

com $M(x,y) = y^2\left(\frac{1}{x} + \log x\right)$ e $N(x,y) = 2y\log x$. Estas funções estão definidas e são de classe C^1 no semi-plano

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0\}$$

Temos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2y}{x} + 2y\log x \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2y}{x},$$

pelo que a equação não é exacta. Multiplicando a equação por um factor integrante $\mu = \mu(x,y)$, obtém-se:

$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0.$$

Para que esta equação seja exacta, μ deverá verificar

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N),$$

o que é equivalente a

$$y^2\left(\frac{1}{x} + \log x\right)\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\left(\frac{2y}{x} + 2y\log x\right) = 2y\log x\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{2y}{x},$$

ou, ainda:

$$y^2\left(\frac{1}{x} + \log x\right)\frac{\partial \mu}{\partial y} - 2y\log x\frac{\partial \mu}{\partial x} = -2y\log x\mu \tag{2}$$

Parece pois provável a existência de um factor integrante dependente apenas de x. De facto, admitindo que $\mu = \mu(x)$, então $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu'(x)$, pelo que a equação (2) reduz-se a:

$$\mu' = \mu.$$

Podemos então tomar $\mu(x) = e^x$. Desta forma, a equação:

$$e^x\left(\frac{1}{x} + \log x\right)y^2 + 2ye^x\log x\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, e portanto existe $F(x,y)$ tal que esta mesma equação se pode escrever:

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = 0.$$

F é então o potencial do campo gradiente $\left(e^x\left(\frac{1}{x} + \log x\right)y^2, 2ye^x\log x\right)$. Assim sendo:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2ye^x\log x.$$

Integrando (em ordem a y), obtém-se:

$$F(x,y) = y^2 e^x \log x + h(x). \tag{3}$$

Por outro lado, como

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 e^x \left(\frac{1}{x} + \log x\right) + h'(x) = e^x \left(\frac{1}{x} + \log x\right) y^2,$$

temos $h'(x) = 0$, pelo que se pode tomar $h(x) = 0$ em (3). A solução geral da equação diferencial é então dada implicitamente por:

$$y^2 e^x \log x = C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Da condição inicial $y(e) = -1$, resulta que $C = e^e$.

Como $\log x \neq 0$ para x numa vizinhança de e, podemos dividir por $e^x \log x$ e obter (escolhendo o sinal de acordo com a condição inicial):

$$y(x) = -\sqrt{\frac{e^e}{e^x \log x}} = -\sqrt{\frac{e^{e-x}}{\log x}}. \tag{4}$$

Esta expressão define uma função continuamente diferenciável em $]1, +\infty[$ e satisfaz a forma implícita da solução nesse intervalo. De acordo com (4), temos que a solução explode quando $x \to 1$, pelo que $]1, +\infty[$ é mesmo o intervalo máximo de solução.

4. Considere a equação diferencial ordinária

$$\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right) \frac{dy}{dx} = 0 \tag{5}$$

a) Mostre que (5) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.

b) Mostre que a solução de (5) com condição inicial $y(-1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$.

c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto -1, da solução dada implicitamente na alínea anterior.

Resolução:

(a) Admitindo que a equação (5) admite um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$, tem-se que

$$\mu(xy)\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \mu(xy)\left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right) \frac{dy}{dx} = 0$$

é uma equação exacta, pelo que

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(xy)\left(4x^2y+3xy^2+2y^3\right)\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(xy)\left(2x^3+3x^2y+4xy^2\right)\Big)$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(xy)=\mu'(xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy)=x\mu'(xy)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}\mu(xy)=\mu'(xy)\frac{\partial}{\partial}(xy)=y\mu'(xy)$$

tem-se

$$\begin{array}{l}\mu'(xy)x\left(4x^2y+3xy^2+2y^3\right)+\mu(xy)(4x^2+6xy+6y^2) \;\; = \\ \mu'(xy)y\left(2x^3+3x^2y+4xy^2\right)+\mu(xy)(6x^2+6xy+4y^2)\end{array}$$

Fazendo $v=xy$, obtém-se então

$$\mu'(v)=\frac{1}{v}\mu(v) \;\Leftrightarrow\; \mu(v)=v \;\Leftrightarrow\; \mu(xy)=xy$$

Por construção a equação

$$xy\left(4x^2y+3xy^2+2y^3\right)+xy\left(2x^3+3x^2y+4xy^2\right)\frac{dy}{dx}=0$$

é exacta, pelo que existe $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que

$$\nabla\Phi(x,y)=(4x^3y^2+3x^2y^3+2xy^4,2x^4y+3x^3y^2+4x^2y^3)$$

e $\Phi(x,y)=C$ define implicitamente a solução da equação. Para calcular Φ,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=4x^3y^2+3x^2y^3+2xy^4 \;\Rightarrow\; \Phi(x,y)=x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4+c(y)$$

e

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=2x^4y+3x^3y^2+4x^2y^3 \;\Rightarrow\; 2x^4y+3x^3y^2+4x^2y^3+c'(y)=2x^4y+3x^3y^2+4x^2y^3$$

o que implica $c(y)=c$. Tem-se então

$$\Phi(x,y)=x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4=C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial. Finalmente, visto $y(-1)=1$ e $\frac{\partial\Phi}{\partial y}(-1,1)=3\neq 0$, o Teorema da Função Implícita garante a existência de solução única de (5) definida por

$$x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4-1=0$$

para x numa vizinhança de $x_0=-1$ como se queria mostrar.

(c) O polinómio de Taylor de segunda ordem pedido, será

$$P_2(x) = y(-1) + y'(-1)(x+1) + y''(-1)\frac{(x+1)^2}{2}$$

É dado que $y(-1) = 1$, e atendendo a que

$$y'(x) = -\frac{4x^2y + 3xy^2 + 2y^3}{2x^3 + 3x^2y + 4xy^2}$$

para todo (x, y) em $\mathbb{R}^2$ que não anule $2x^3 + 3x^2y + 4xy^2$, tem-se em particular que

$$y'(-1) = -\frac{4x^2y + 3xy^2 + 2y^3}{2x^3 + 3x^2y + 4xy^2}\Big|_{(x,y)=(-1,1)} = 1$$

Finalmente, derivando (6) em ordem a x

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\frac{(8xy + 4x^2y' + 3y^2 + 6xyy' + 6y^2y')(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2)}{(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2)^2} + \\ &\quad + \frac{(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3)(6x^2 + 6xy + 3x^2y' + 4y^2 + 8xyy')}{(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2)^2} \end{aligned}$$

Sabendo que se $x = -1$, $y = 1$ e $y' = 1$, tem-se então

$$y''(-1) = -\frac{2}{3}$$

e

$$P_2(x) = 1 + (x+1) - \frac{(x+1)^2}{3}$$