TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2026/2027

Cursos: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Propostos nº 6

Equações Diferenciais Exactas e Redutíveis a Exactas

1. Mostre que qualquer equação separável,

$$M(x) + N(y)y' = 0$$

é exata.

2. Determine a solução dos problemas de Cauchy

(a) $xy^2 + x + yx^2y' = 0\ ,\ y(1) = 1$ **(b)** $\cos y + (y^2 - x\,\mathrm{sen}\,y)y' = 0\ ,\ y(0) = 1$

3. Determine o factor integrante e a solução de cada um dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $y - (x + 6y^2)y' = 0\ ,\ y(1) = 1$ **(b)** $5x^2 - y^2 + 2yy' = 0\ ,\ y(0) = -3$

(c) $x + y + \mathrm{tg}(x)y' = 0\ ,\ y(\frac{\pi}{2}) = -1$ **(d)** $2y + (x - \mathrm{sen}\,\sqrt{y})y' = 0\ ,\ y(2) = \pi^2$

4. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ye^y - 2x}$$

(a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.

(b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

5. Mostre que a equação diferencial

$$x^2 + y^2 - x - y\frac{dy}{dx} = 0$$

admite um factor integrante da forma $\mu(x, y) = \mu(x^2 + y^2)$ e resolva a equação.

Soluções

1.

2. **(a)** $y(x) = \sqrt{\frac{2-x^2}{x^2}}$ **(b)** $3x\cos y + y^3 - 1 = 0$

3. **(a)** $\mu(y) = y^{-2}$; $y(x) = \frac{5+\sqrt{25+24x}}{12}$ **(b)** $\mu(x) = e^{-x}$; $y(x) = -\sqrt{5(x^2+2x+2) - e^x}$
   (c) $\mu(x) = \cos x$; $y(x) = \frac{\frac{\pi}{2}-1}{\operatorname{sen} x} - x - \operatorname{cotg} x$ **(d)** $\mu(y) = 1/\sqrt{y}$; $x\sqrt{y} + \cos\sqrt{y} = 2\pi - 1$

4. **(a)** $\mu(y) = y$ **(b)** $xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y + e = 0$

5. $\mu(x,y) = (x^2+y^2)^{-1}$; $y(x) = \sqrt{ce^{2x} - x^2}$ ou $y(x) = -\sqrt{ce^{2x} - x^2}$, com $c > 0$.