

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/2024

Cursos: LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-Am, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas nº 4

Exponencial de uma Matriz. Equações Vectoriais Lineares de 1ª Ordem e Equações Lineares de Ordem n (Caso não Homogéneo)

1. Para cada uma das seguintes matrizes determine e^{At} :

(a) $A = 0$ (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y + e^{2t} \\ y' = -8y + 8 \end{cases}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(0) = (0, 0, 0, 0) \end{cases}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & -\pi & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

(b) Resolva o problema.

4. Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 2 \\ \dot{y} = 3x - y + 2 \\ \dot{z} = ty - tz \end{cases}$$

sujeito às condições iniciais $x(0) = y(0) = -z(0) = -1$.

Sugestão: note que as primeiras duas equações não mencionam z .

5. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ de componentes reais ou complexas. Mostre que se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$. Aproveite o resultado para calcular:

$$\exp \left(t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Sugestão: mostre que $X(t) = e^{At} e^{(B-A)t}$ satisfaz $\dot{X} = BX$, $X(0) = I$.

6. Determine a solução geral de cada uma das equações:

(a) $y'' - 2y' - 3y = \cos t$ (b) $y''' - y' = 2t + 10e^{2t} \sin t$

(c) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = t$ (d) $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}$

7. Determine a solução do problema de valor inicial

$$y^{(3)} + 2y^{(2)} + y' - 3 = b(t) \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y^{(2)}(0) = 1$$

quando:

(a) $b(t) = 0$ (b) $b(t) = t$ (c) $b(t) = e^{-t}$

8. Determine a solução da equação diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos x}$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$

9. Considere a equação

$$y^{(4)} - 3y^{(3)} + 2y^{(2)} = t + \sin t \tag{1}$$

- (a) Determine a solução geral da equação homogénea correspondente a (1).
(b) Determine uma solução particular de (1).
(c) Determine a solução de (1) que verifica a condição inicial

$$y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$$

10. Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{t}{1-t}y' - \frac{1}{1-t}y = 1 - \frac{1}{t}$$

- (a) Determine soluções da equação homogénea associada da forma $y(t) = t^k$ e da forma $y(t) = e^{\lambda t}$, e aproveite os resultados para escrever a solução geral da equação homogénea.
(b) Calcule a solução da equação que verifica as condições iniciais $y(2) = 1$ e $y'(2) = -1$.

Soluções

$$1. \text{ (a) } e^{At} = I \quad \text{(b) } e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\pi t} \end{bmatrix} \quad \text{(c) } e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{4t} - e^{2t} & -3e^{4t} + 3e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & -e^{4t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\text{(d) } e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(e) } e^{At} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 - 6t & 12t \\ -3t & 1 + 6t \end{bmatrix}$$

$$\text{(f) } e^{At} = e^{3t} \begin{bmatrix} \cos(2t) + \text{sen}(2t) & -2\text{sen}(2t) \\ \text{sen}(2t) & \cos(2t) - \text{sen}(2t) \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + (t + \frac{1}{2})e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3. \text{ (a) } \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 5te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \cos(\pi t) & e^{-2t} \text{sen}(\pi t) \\ 0 & 0 & -e^{-2t} \text{sen}(\pi t) & e^{-2t} \cos(\pi t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\text{(b) } \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \frac{e^{-2t}}{\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\text{sen}(\pi t) \\ 1 - \cos(\pi t) \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 + 2e^{t^2/2} \end{bmatrix}$$

$$5. e^t \begin{bmatrix} 1 & 2t & 3t + 2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$6. \text{ (a) } y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{10} (\text{sen } t + 2 \cos t) \text{ com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{(b) } y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 - t^2 - e^{2t} \cos t \text{ com } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{(c) } y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t} - \frac{1}{8} t^2 - \frac{1}{12} t^3 \text{ com } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

$$\text{(d) } y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + e^t (t \log |t| - t) \text{ com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$7. \text{ (a) } y(t) = -5 + 5e^{-t} + 2te^{-t} + 3t \quad \text{(b) } y(t) = -2 + 2e^{-t} + te^{-t} + \frac{t^2}{2} + t$$

$$\text{(c) } y(t) = -4 + 4e^{-t} + te^{-t} + 3t - \frac{t^2 e^{-t}}{2}$$

$$8. y(x) = e^x (\cos x - \text{sen } x + \cos x \log(\cos x) + x \text{sen } x)$$

$$9. \text{ (a) } y_H(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{2t}, \text{ com } c_1, c_2, c_3 \text{ e } c_4 \in \mathbb{R}$$

$$\text{(b) } y_p(t) = \frac{3t^2}{8} + \frac{t^3}{12} - \frac{\text{sen } t + 3 \cos t}{10} \quad \text{(c) } y(t) = \frac{27}{16} + \frac{11}{8} t - \frac{3}{2} e^t + \frac{9}{80} e^{2t} + \frac{3t^2}{8} + \frac{t^3}{12} - \frac{\text{sen } t + 3 \cos t}{10}$$

$$10. \text{ (a) } \lambda = k = 1; y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t \quad \text{(b) } y(t) = (2 + \log 2)t - 2e^{t-2} - 1 - t \log t$$