

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/2024

Ficha de Problemas nº 4 (aula online)

Exponencial de uma Matriz e Equações Vectoriais Lineares de 1ª Ordem

1. Para cada uma das seguintes matrizes determine e^{At} :

(a) $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule e^{At} .

(b) Determine a solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(0) = (0, 1, 1) \end{cases} \quad \text{onde } \mathbf{b}(t) = (0, e^{t\sqrt{2}}, e^{-t}).$$

3. Determine a solução geral do sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 1 \\ \dot{y} = 4x - 2y - 2 \end{cases}$$