TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2022/2024

Cursos: LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas Resolvidos nº 3

Equações de Ordem n (Caso Homogéneo) e Equações Vectoriais de 1ª Ordem (Caso Homogéneo)

1. Determine a solução geral das seguintes equações:

$$(\mathbf{a})\ y'' + 9y' + 20y = 0 \qquad (\mathbf{b})\ y'' + \pi^2 y = 0 \qquad (\mathbf{c})\ y'' + 2y' + y = 0$$

Resolução

(a) Usando a notação $y' = Dy$ (e como tal $y'' = D^2 y$) obtém-se

$$y'' + 9y' + 20y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 9D + 20)y = 0.$$

Tem-se então que os zeros do polinómio característico associado são

$$P(r) = r^2 + 9r + 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = -4 \ \vee \ r = -5.$$

Assim a equação é equivalente a

$$(D+4)(D+5)y = 0 \quad \Leftarrow \quad (D+4)y = 0 \ \text{ ou } \ (D+5)y = 0.$$

Na seguinte tabela representamos as raízes de $P(r)$ e respectivas multiplicidades (ou ordens) e os correspondentes elementos da base do espaço de soluções da equação diferencial:

Raiz	Multiplicidade	Base
-4	1	e^{-4t}
-5	1	e^{-5t}

Tem-se então que uma base do espaço de soluções da equação $(D^2 + 9)(D + 20)y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \left\{e^{-4t},\ e^{-5t}\right\}$. Assim, a sua solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-5t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Usando a notação $y' = Dy$, obtém-se

$$y'' + \pi^2 y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + \pi^2)y = 0.$$

Tem-se então que a raiz do polinómio característico associado é

$$P(r) = r^2 + \pi^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm i\pi$$

Neste caso, como ocorrem raízes complexas, acrescentamos à tabela introduzida na alínea (a) uma coluna com uma base constituída apenas por funções reais:

Raiz	**Multiplicidade**	**Base Complexa**	**Base Real**
$\pm\pi i$	1	$e^{i\pi t}$, $e^{-i\pi t}$	$\cos(\pi t)$, $\operatorname{sen}(\pi t)$

Tem-se então que uma base do espaço de soluções (reais) da equação $(D^2 + \pi^2)y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \{\cos(\pi t),\ \operatorname{sen}(\pi t)\}$ e assim a sua solução geral é

$$y(t) = c_1 \cos(\pi t) + c_2 \operatorname{sen}(\pi t) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(c) Usando a notação $y' = Dy$, obtém-se

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 2D + 1)y = 0.$$

Tem-se então que o polinómio característico associado é $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$ cuja única raiz é -1. Então:

Raiz	**Multiplicidade**	**Base**
-1	2	e^{-t}, te^{-t}

Tem-se então que uma base do espaço de soluções da equação $(D^2 + 2D + 1)y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \{e^{-t},\ te^{-t}\}$. Assim, a sua solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Seja $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Determine a solução da seguinte equação diferencial:

$$y'' - ky = 0$$

Sugestão: o cálculo da base do espaço de soluções da equação depende do sinal de k.

Resolução

(a) Usando a notação $y' = Dy$, a equação $y'' - ky = 0$ pode-se escrever na forma:

$$(D^2 - k)y = 0$$

Tem-se pois que o polinómio característico associado é $P(r) = r^2 - k = 0$. Para determinar as raízes do polinómio característico e as correspondentes soluções da equação diferencial, é conveniente considerar 3 casos.

Caso 1 ($k > 0$) :
Neste caso o polinómio característico tem duas raízes reais distintas $\pm\sqrt{k}$ e, assim:

Raiz	Multiplicidade	Base
$-\sqrt{k}$	1	$e^{-\sqrt{k}t}$
$\sqrt{k}$	1	$e^{\sqrt{k}t}$

Desta forma, uma base do espaço de soluções da equação $(D^2 - k)y = 0$ pode ser $\mathcal{B} = \left\{e^{-\sqrt{k}t},\ e^{\sqrt{k}t}\right\}$. Assim, a solução geral da equação é, neste caso:

$$y(t) = c_1 e^{-\sqrt{k}t} + c_2 e^{\sqrt{k}t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Caso 2 ($k = 0$) : Neste caso, o polinómio característico tem uma única raiz, 0. Tendo em conta que $e^{0t} = 1$:

Raiz	Multiplicidade	Base
0	2	1, t

Uma base do espaço de soluções da equação $D^2 y = 0$ é, por exemplo, $\mathcal{B} = \left\{1,\ t\right\}$ e, assim, a sua solução geral é

$$y(t) = c_1 + c_2 t \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Caso 3 ($k < 0$) :
Neste caso o polinómio característico tem duas raízes complexas conjugadas, $\pm i\sqrt{|k|} = \pm i\omega$ (definindo $\omega = \sqrt{|k|}$).

Raiz	Multiplicidade	Base Complexa	Base Real
$\pm\, i\sqrt{\|k\|} = \pm i\omega$	1	$e^{i\omega t}$, $e^{-i\omega t}$	cos (ωt), sen (ωt)

Tem-se então que a solução geral da equação é, neste caso

$$y(t) = c_1 \text{cos } (\omega t) + c_2 \text{sen } (\omega x) \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(onde $\omega = \sqrt{|k|} = \sqrt{-k} \Leftrightarrow k = -\omega^2$).

3. Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1 \ , \ \ y'(0) = -2 \end{cases}$$

Resolução:

Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. Usando a notação $y' = Dy$, obtém-se

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 2D + 5)y = 0$$

O polinómio característico associado é $P(r) = r^2 + 2r + 5$, e as suas raízes são $-1 \pm 2i$. Assim uma base complexa é

$$\mathcal{B}_c = \left\{ e^{(-1+2i)t}, \ e^{(-1-2i)t} \right\}$$

e a respectiva base real é

$$\mathcal{B} = \left\{ e^{-t}\cos(2t), \ e^{-t}\operatorname{sen}(2t) \right\}$$

A sua solução geral é

$$y(t) \ = \ c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\operatorname{sen}(2t) \, , \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Temos agora que determinar c_1 e c_2 de modo a que $y(0) = 1$ e $y'(0) = -2$. Sendo a solução geral, $y(t)$, dada pela expressão anterior, tem-se que

$$y'(t) \ = \ -c_1 e^{-t}\cos(2t) - 2c_1 e^{-t}\operatorname{sen}(2t) - c_2 e^{-t}\operatorname{sen}(2t) + 2c_2 e^{-t}\cos(2t)$$

Então

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 + 2c_2 = -2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Resulta pois que a solução do PVI é

$$y(t) \ = \ e^{-t}\cos(2t) - \frac{1}{2} e^{-t}\operatorname{sen}(2t)$$

4. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais.

$$\textbf{(a)} \ \ y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y = 0$$

$$\textbf{(b)} \ \ y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

Resolução

(a) Usando a notação $y' = Dy$, a equação diferencial pode-se escrever na forma:

$$(D^4 + D^3 - 3D^2 - 5D - 2)y = 0$$

O polinómio característico associado é

$$P(r) = r^4 + r^3 - 3r^2 - 5r - 2$$

É fácil de descobrir duas raízes de $P(r)$; de facto, verifica-se que $P(-1) = 0$ e $P(2) = 0$. Usando (por exemplo) a regra de Rufini, obtém-se a factorização

$$P(r) = (r+1)(r-2)(r^2 + 2r + 1) = (r+1)^3(r-2),$$

de onde resulta a tabela seguinte

Raiz	**Multiplicidade**	**Base**
-1	3	e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}
2	1	e^{2t}

Tem-se então que uma base do espaço de soluções da equação $(D^3 + D^2 - 2D)y = 0$ é, por exemplo $\mathcal{B} = \left\{e^{-t},\ te^{-t},\ t^2e^{-t},\ e^{2t}\right\}$ e assim a sua solução geral é

$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + c_3t^2e^{-t} + c_4e^{2t} \quad , \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

(b) Usando a notação $y' = Dy$, obtém-se

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$$

O polinómio característico associado é

$$P(r) = r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = (r+i)^2(r-i)^2$$

Assim

$$(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D-i)^2(D+i)^2y = 0$$

Raiz	**Multiplicidade**	**Base Complexa**	**Base Real**
$\pm i$	2	e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it}	$\cos t$, $\text{sen}\, t$, $t\cos t$, $t\text{sen}\, t$

A solução geral pode então ser dada por:

$$y(x) = c_1\cos t + c_2\text{sen}\, t + c_3t\cos t + c_4t\text{sen}\, t \quad , \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

5. Resolva os seguintes problemas de valor inicial.

(a) $\begin{cases} y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0 \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1, \\ y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 1. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y''' - 13y'' + 50y' - 56y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1. \end{cases}$

Resolução

(a) Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. Usando a notação $y' = Dy$, obtém-se

$$y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D + 1)y = 0$$

O polinómio característico associado é $P(r) = r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 1$. Pela formula do binómio de Newton:

$$P(r) = (r-1)^4$$

Assim sendo,

$$(D^4 - 4D^3 + 6D^2 - 4D + 1)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D-1)^4 y = 0,$$

Uma base do espaço de soluções da equação $(D-1)^4 y = 0$ é $\mathcal{B} = \{e^t,\ te^t,\ t^2e^t,\ t^3e^t\}$, pelo que a sua solução geral pode ser dada por

$$y(t) = c_0e^t + c_1te^t + c_2t^2e^t + c_3t^3e^t \quad , \quad c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Resta então determinar c_0,c_1,c_2 e c_3 de modo a que $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$ e $y'''(0) = 1$. Sendo $y(t) = \left(c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3\right)e^t$, tem-se que

$$\begin{cases} y'(t) = \left(c_0 + c_1 + (c_1 + 2c_2)t + (c_2 + 3c_3)t^2 + c_3t^3\right)e^t \\ y''(t) = \left(c_0 + 2c_1 + 2c_2 + (c_1 + 4c_2 + 6c_3)t + (c_2 + 6c_3)t^2 + c_3t^3\right)e^t \\ y'''(t) = \left(c_0 + 3c_1 + 6c_2 + 6c_3 + (c_1 + 6c_2 + 18c_3)t + (c_2 + 9c_3)t^2 + c_3t^3\right)e^t \end{cases}$$

pelo que

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -1 \\ y'''(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_0 + c_1 = 1 \\ c_0 + 2c_1 + 2c_2 = -1 \\ c_0 + 3c_1 + 6c_2 + 6c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

Finalmente, a solução do (PVI) é

$$y(t) = (1 - t^2 + t^3)e^t$$

(b) Vamos, em primeiro lugar calcular a solução geral da equação. Usando a notação $y' = Dy$, obtém-se

$$y''' - 13y'' + 50y' - 56y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^3 - 13D^2 + 50D - 56)y = 0 \tag{1}$$

Tem-se então que o polinómio característico associado é $P(r) = r^3 - 5r^2 - 22r + 56$. Tendo em conta que $P(2) = 0$, dividindo $P(r)$ por $r - 2$,

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -13 & +50 & -56 \\
2 & & 2 & -22 & 56 \\
\hline
 & 1 & -11 & 28 & \underline{\vert\, 0}
\end{array}$$

obtém-se a factorização:

$$P(r) = (r-2)(r^2 - 11r + 28) = (r-2)(r-4)(r-7)$$

Resulta pois que (1) é equivalente à equação diferencial

$$(D-1)(D-4)(D-7)y = 0,$$

cujo espaço de soluções possui a seguinte base

Raiz	**Multiplicidade**	**Base**
2	1	e^{2t}
4	1	e^{4t}
7	1	e^{7t}

A solução geral da equação (1) é, pois:

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} + c_3 e^{7t}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Para resolver o problema de valor inicial, resta determinar c_1,c_2 e c_3 de forma a que as condições iniciais sejam satisfeitas. Calculando as derivadas da solução geral,

$$\begin{aligned}
y'(t) &= 2c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{4t} + 7c_3 e^{7t}, \\
y''(t) &= 4c_1 e^{2t} + 16c_2 e^{4t} + 49c_3 e^{7t},
\end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \\ y''(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ 2c_1 + 4c_2 + 7c_3 = -1 \\ 4c_1 + 16c_2 + 49c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = -4 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

Desta forma, a solução do PVI é

$$y(t) = 4e^{2t} - 4e^{4t} + e^{7t}$$

6. Encontre a equação diferencial linear homogénea de menor ordem possível tal que as seguintes funções sejam suas soluções.

   (a) $y_1(t) = e^{-t\sqrt{3}}$, $y_2(t) = te^{t\sqrt{3}}$

   (b) $y_1(x) = e^x\cos(2x)$ e $y_2(x) = xe^{-x}$

   (c) $y(x) = x^2$

   Resolução

(a) Dado que $y_2(t) = te^{t\sqrt{3}}$ é solução, então também $y_3(t) = e^{t\sqrt{3}}$ o é; isto porque $\sqrt{3}$ é certamente raiz do polinómio característico da equação. As funções y_1, y_2 e y_3 formam uma base de um espaço de dimensão 3 (visto serem 3 funções linearmente independentes); em consequência, a equação diferencial de menor ordem que as admite como soluções é de ordem 3. Consideraramos uma versão inversa da tabela anteriormente introduzida

Base	**Raiz**	**Multiplicidade**	**Termo de $p(D)$**
$e^{-t\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	1	$D+\sqrt{3}$
$e^{t\sqrt{3}}$, $te^{t\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	2	$(D-\sqrt{3})^2$

Isto significa que $e^{t\sqrt{3}}$ e $te^{t\sqrt{3}}$ são soluções de $(D-\sqrt{3})^2y = 0$, enquanto $e^{-t\sqrt{3}}$ é uma solução de $(D+\sqrt{3})y = 0$. Assim sendo, as funções y_1 e y_2 são soluções da equação

$$(D-\sqrt{3})^2(D+\sqrt{3})y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (D^3 - \sqrt{3}D^2 - 3D + 3\sqrt{3})y = 0.$$

A equação pedida é

$$y''' - \sqrt{3}y'' - 3y' + 3\sqrt{3}y = 0$$

(b) Começamos por notar que se $e^x\cos(2x)$ é solução da equação também $e^x\text{sen}\,(2x)$; da mesma forma, se xe^{-x} é solução da equação também e^{-x} o é. Tem-se então que $e^x\cos(2x)$, $e^x\text{sen}\,(2x)$, xe^{-x} e e^{-x} formam uma base do espaço de soluções da equação pedida, o que mostra que tem que ser de ordem 4. Podemos então considerar a tabela

Base Real	**Base Complexa**	**Raiz**	**Mult.**	**Termo de $p(D)$**
e^{-x}, xe^{-x}	e^{-x}, xe^{-x}	-1	1	$(D+1)^2$
$e^x\cos(2x)$,$e^x\text{sen}\,(2x)$	$e^{(1+2i)x}$, $e^{(1-2i)x}$	$1\pm 2i$	1	$\big(D-(1+2i)\big)\big(D-(1-2i)\big)$

Uma vez que

$$(D+1)^2(D-(1+2i))(D-(1-2i))y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D+1)^2(D^2-2D+5)y = 0$$

a equação pedida é

$$y^{(4)} + 2y'' + 8y' + 5y = 0$$

(c) Começamos por notar que se x^2 é solução, então as funções 1 e x também o são, pelo que procuramos uma equação de ordem 3. Podemos considerar a tabela

Base	**Raiz**	**Multiplicidade**	**Termo de $p(D)$**
$1,\ x,\ x^2$	0	3	D^3

pelo que a equação pretendida é

$$D^3 y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$$

7. Resolva o sistema de equações diferenciais lineares vectoriais de primeira ordem:

$$(\mathbf{a})\ \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X} \qquad (\mathbf{b})\ \mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

$$(\mathbf{c})\ \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} -\pi & 1 & 0 \\ 0 & -\pi & 1 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

Resolução

(a) Fazendo $\mathbf{X} = (x, y, z)$ e escrevendo na forma de sistema

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -y \\ z' = 3z \end{cases}$$

observa-se que as três equações são independentes (denomina-se um sistema *desacoplado*) e como tal podem ser resolvidas directamente. Assim

$$x' = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = ae^{2t}$$

e

$$y' = -y \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = be^{-t}$$

e

$$z' = 2z \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = ce^{3t}$$

A solução geral da equação é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ be^{-t} \\ ce^{3t} \end{bmatrix}$$

com a, b e c constantes reais.

Observação: Sendo D uma matriz $n \times n$ diagonal

$$D = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix}$$

a solução do sistema em $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{X}' = D\mathbf{X}$ é da forma

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{m_1 t} \\ c_2 e^{m_2 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n e^{m_n t} \end{bmatrix}$$

(b) Fazendo $\mathbf{X} = (x, y, z)$ e escrevendo na forma de sistema

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3x + 4y \\ z' = 4x + 4y + 4z \end{cases}$$

observa-se que a primeira equação depende apenas da função x e pode ser resolvida de imediato. Assim

$$x' = 2x \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = ae^{2t}$$

Substituindo na segunda equação obtem-se

$$y' = 3ae^{2t} + 4y \quad \Leftrightarrow \quad y' - 4y = 3ae^{2t}$$

Trata-se de uma equação linear de primeira ordem não homogénea que depende só da função y. A equação admite o factor integrante $\mu(t) = e^{-4t}$, pelo que

$$\begin{aligned} y' - 4y = 3ae^{2t} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-4t}y' - 4e^{-4t}y = 3ae^{-2t} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(e^{-4t}y\right)' = 3ae^{-2t} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-4t}y = -\frac{3a}{2}e^{-2t} + b \\ &\Leftrightarrow \quad y(t) = -\frac{3a}{2}e^{2t} + be^{4t} \end{aligned}$$

Tendo agora as funções $x(t)$ e $y(t)$ podemos substituir na terceira equação e obter uma equação linear de primeira ordem não homogénea que depende só da função z:

$$z' = 4ae^{2t} + 4\Big(-\frac{3a}{2}e^{2t} + be^{4t}\Big) + 4z \quad \Leftrightarrow \quad z' - 4z = -2ae^{2t} + 4be^{4t}$$

A equação admite o factor integrante $\mu(t) = e^{-4t}$, pelo que

$$\begin{aligned} z' - 4z = -2ae^{2t} + 4be^{4t} &\Leftrightarrow e^{-4t}z' - 4e^{-4t}z = -2ae^{-2t} + 4b \\ &\Leftrightarrow \left(e^{-4t}z\right)' = -2ae^{-2t} + 4b \\ &\Leftrightarrow e^{-4t}z = ae^{-2t} + 4bt + c \\ &\Leftrightarrow z(t) = ae^{2t} + 4bte^{4t} + ce^{4t} \end{aligned}$$

A solução geral da equação é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{2t} \\ -\frac{3a}{2}e^{2t} + be^{4t} \\ ae^{2t} + 4bte^{4t} + ce^{4t} \end{bmatrix}$$

com a, b e c constantes reais.

Observação: Sendo T uma matriz $n \times n$ triangular superior (ou inferior) a solução do sistema $\mathbf{X}' = T\mathbf{X}$ pode ser encontrada desta maneira.

(c) Fazendo $\mathbf{X} = (x, y, z)$ e escrevendo na forma de sistema

$$\begin{cases} x' = -\pi x + y \\ y' = -\pi y + z \\ z' = -\pi z \end{cases}$$

observa-se que a terceira equação depende apenas da função z e pode ser resolvida de imediato. Assim

$$z' = -\pi z \quad \Leftrightarrow \quad z(t) = ce^{-\pi t}$$

Substituindo na segunda equação obtem-se

$$y' = -\pi y + ce^{-\pi t} \quad \Leftrightarrow \quad y' + \pi y = ce^{-\pi t}$$

Trata-se de uma equação linear de primeira ordem não homogénea que depende só da função y. A equação admite o factor integrante $\mu(t) = e^{\pi t}$, pelo que

$$\begin{aligned} y' + \pi y = ce^{-\pi t} &\Leftrightarrow e^{\pi t}y' + \pi e^{\pi t}y = c \\ &\Leftrightarrow \left(e^{\pi t}y\right)' = c \\ &\Leftrightarrow e^{\pi t}y = ct + b \\ &\Leftrightarrow y(t) = (ct + b)e^{-\pi t} \end{aligned}$$

Tendo agora a função $y(t)$ podemos substituir na primeira equação e obter uma equação linear de primeira ordem não homogénea que depende só da função x:

$$x' = -\pi x + (ct + b)e^{-\pi t} \quad \Leftrightarrow \quad x + \pi x = (ct + b)e^{-\pi t}$$

A equação admite o factor integrante $\mu(t) = e^{\pi t}$, pelo que

$$\begin{aligned} x' = -\pi x + (ct+b)e^{-\pi t} &\Leftrightarrow e^{\pi t}x' + \pi e^{\pi t}x = ct + b \\ &\Leftrightarrow \left(e^{\pi t}x\right)' = ctb \\ &\Leftrightarrow e^{\pi t}x = \frac{c}{2}t^2 + bt + a \\ &\Leftrightarrow x(t) = (\frac{c}{2}t^2 + bt + a)e^{-\pi t} \end{aligned}$$

A solução geral da equação é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^{-\pi t} \begin{bmatrix} \frac{c}{2}t^2 + bt + a \\ ct + b \\ c \end{bmatrix}$$

com a, b e c constantes reais.

Observação: Uma matriz tendo a forms da deste exemplo

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

isto é, uma matriz $n \times n$ em que todos os elementos da diagonal principal são $\lambda \in \mathbb{R}$ e a diagonal acima da principal está preenchida por 1's, denomina-se um *bloco de Jordan*. Resolvendo de forma análoga ao que fizemos no exemplo, a solução do sistema em $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{X}' = J\mathbf{X}$ é da forma

$$\mathbf{X}(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t + c_3 \frac{t^2}{2} + \cdots c_n \frac{t^{n-1}}{n-1} \\ c_2 + c_3 t + \cdots c_n \frac{t^{n-2}}{n-2} \\ . \\ c_n t + c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

8. Encontre a solução geral dos sistemas

$$(\mathbf{a}) \begin{cases} x' = -7x + 5y \\ y' = -10x + 8y \end{cases} \qquad (\mathbf{b}) \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -x + 2y - z \\ z' = -y + z \end{cases}$$

Resolução

(a) Pelo método de substitução, resolvendo, por exemplo, a primeira equação em ordem a y obtém-se

$$y = \frac{x' + 7x}{5} \tag{2}$$

Substituindo na segunda equação, obtemos a equação de segunda ordem em x

$$\begin{aligned} \left(\frac{x' + 7x}{5}\right)' = -10x + 8\left(\frac{x' + 7x}{5}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad x'' - x' - 6x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (D^2 - D - 6)x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (D - 3)(D + 2)x = 0 \end{aligned}$$

e assim a solução geral da equação é

$$x(t) = ae^{3t} + be^{-2t}$$

Substituindo em (2) obtemos

$$y(t) = \frac{1}{5}\left(ae^{3t} + be^{-2t}\right)' + 7\frac{1}{5}\left(ae^{3t} + be^{-2t}\right) = 2ae^{3t} + be^{-2t}$$

A solução do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{3t} + be^{-2t} \\ 2ae^{3t} + be^{-2t} \end{bmatrix}$$

com a e b constantes reais.

(b) Pelo método de substitução, resolvendo, por exemplo, a primeira equação em ordem a y obtém-se

$$y = x - x' \tag{3}$$

Substituindo nas outras duas equações obtemos o sistema em x e z

$$\begin{cases} (x - x')' = -x + 2(x - x') - z \\ z' = -(x - x') + z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x'' - 3x' + x = z \\ z' = -x + x' + z \end{cases}$$

Tem-se então que

$$z = x'' - 3x' + x \tag{4}$$

e substituindo na última equação obtemos a equação de terceira ordem em x

$$\begin{aligned} (x'' - 3x' + x)' = -x + x' + (x'' - 3x' + x) \quad &\Leftrightarrow \quad x''' - 4x'' + 3x' = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (D^3 - 4D^2 + 3D)x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad D(D - 3)(D - 1)x = 0 \end{aligned}$$

e a solução geral da equação é

$$x(t) = a + be^{3t} + ce^{t}$$

Substituindo em (3) e em (4) obtemos

$$y = a + be^{3t} + ce^{t} - (a + be^{3t} + ce^{t})' = a - 2be^{3t}$$

e

$$z = (a + be^{3t} + ce^t)'' - 3(a + be^{3t} + ce^t)' + (a + be^{3t} + ce^t) = a + be^{3t} - ce^t$$

A solução do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + be^{3t} + ce^t \\ a - 2be^{3t} \\ a + be^{3t} - ce^t \end{bmatrix}$$

com a, b e c constantes reais.

9. Resolva o seguinte (PVI) em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + 7y \end{cases} \quad , \quad (x(0), y(0)) = (9, 3)$$

Resolução:

Começamos por calcular a solução geral do sistema. Resolvendo a segunda equação em ordem a x obtém-se

$$x = \frac{y' - 7y}{3} \tag{5}$$

Substituindo na primeira equação, obtemos a equação de segunda ordem em y

$$\begin{aligned} \Big(\frac{y' - 7y}{3}\Big)' = \Big(\frac{y' - 7y}{3}\Big) - 3y \quad &\Leftrightarrow \quad y'' - 8y' + 16y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (D - 4)^2 y = 0 \end{aligned}$$

e a solução geral desta equação é

$$y(t) = (a + bt)e^{4t}$$

Substituindo em (5) obtemos

$$3x(t) = \Big((a + bt)e^{4t}\Big)' - 7\Big((a + bt)e^{4t}\Big) = \Big(- 3a + b(1 - 3t)\Big)e^{4t}$$

A solução do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{4t} \begin{bmatrix} -a + b(\frac{1}{3} - t) \\ a + bt \end{bmatrix}$$

com a e b constantes reais. Temos agora que determinar as constantes a e b de modo a que $(x(0), y(0)) = (9, 3)$. Então

$$\begin{cases} x(0) = 9 \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -a - \frac{1}{3}b = 9 \\ a = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = 36 \end{cases}$$

e assim a solução do (PVI) é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{4t} \begin{bmatrix} 9 - 36t \\ 3 + 36t \end{bmatrix}$$

10. Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$

Sugestão: Determine primeiro uma solução particular constante.

Resolução:

Escrevendo o sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{AX} + \mathbf{C}(t) \tag{6}$$

Dado que a equação é linear, uma sua solução será da forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{X_h} + \mathbf{X_p}$$

em que $\mathbf{X_h}$ é a solução geral do problema homogéneo associado $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, e $\mathbf{X_p}$ é uma solução particular da equação $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{C}$. Seguindo a sugestão, vamos procurar uma solução particular constante, ou seja, vamos procurar $\mathbf{X_p} = (c_1, c_2)$ que verifique a equação (6), isto é

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 14c_1 - 10c_2 + 1 = 0 \\ 10c_1 - 2c_2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (c_1, c_2) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

pelo que $\mathbf{X_p} = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$. De seguida, calculamos $\mathbf{X_h}$ resolvendo o sistema homogéneo associado.

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y \\ y' = 10x - 2y \end{cases}$$

Resolvendo, por exemplo, a segunda equação em ordem a x

$$x = \frac{y' + 2y}{10} \tag{7}$$

Substituindo na primeira equação obtém-se

$$y'' - 12y' + 72y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(D^2 - 12D + 72\right) y = 0$$

O polinómio característico associado tem raízes $6 \pm 6i$ (calculadas acima) e como tal

$$y(t) = e^{6t} \left(a \cos(6t) + b \,\mathrm{sen}\,(6t)\right)$$

Substituindo em (7)

$$x(t) = \frac{e^{6t}}{5} \Big((4a + 3b)\cos(6t) + (4b - 3a)\,\mathrm{sen}\,(6t) \Big)$$

e

$$\mathbf{X_h} = \frac{e^{6t}}{5}\left[\begin{array}{c}(4a+3b)\cos(6t)+(4b-3a)\text{sen}\,(6t)\\ 5a\cos(6t)+5b\,\text{sen}\,(6t)\end{array}\right]$$

e finalmente

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p = \frac{e^{6t}}{5}\left[\begin{array}{c}(4a+3b)\cos(6t)+(4b-3a)\text{sen}\,(6t)-\frac{1}{4}\\ 5a\cos(6t)+5b\,\text{sen}\,(6t)-\frac{1}{4}\end{array}\right]$$

para $a,\ b \in \mathbb{R}$.