

## Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/2024

Cursos: LEQ, LEAmbi, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

### Ficha de Problemas Resolvidos nº 2

#### Equações Diferenciais Separáveis, Exactas e Redutíveis a Exactas

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

$$(a) \quad xy + (1 + x^2)y' = 0 \qquad (b) \quad y' = 1 - x + y^2 - xy^2$$

**Resolução:**

(a) Para  $y \neq 0$ , a equação pode ser escrita na forma

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x}{1+x^2} \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{x}{1+x^2} dx + c$$

$$\Leftrightarrow \log |y| = -\frac{1}{2} \log(1+x^2) + c$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{\pm e^c}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}$$

onde  $k \in \mathbb{R}$ . Note-se que a função nula,  $y(x) \equiv 0$  é também solução da equação diferencial.

(b) A equação pode ser escrita na forma

$$y' = (1-x)(1+y^2) \Leftrightarrow \frac{y'}{1+y^2} = 1-x \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left( \int \frac{dy}{y^2+1} \right) = 1-x$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{arctg} y = x - \frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow y = \operatorname{tg} \left( x - \frac{x^2}{2} + c \right)$$

2. Calcule a solução do seguinte problema de valor inicial.

$$\frac{du}{dt} = tu^3(1+t^2)^{-1/2}, \quad u(0) = 1$$

**Resolução:**

Trata-se de uma equação separável que pode ser escrita na forma

$$u^{-3}u' = t(1+t^2)^{-1/2}$$

Integrando em ordem a  $t$

$$\int u^{-3} du = \int t(1+t^2)^{-1/2} dt + c \Leftrightarrow \frac{u^{-2}}{-2} = (1+t^2)^{1/2} + c$$

pelo que a solução geral da equação é dada por

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{c - 2\sqrt{1+t^2}}} \quad \text{ou} \quad u(t) = \frac{-1}{\sqrt{c - 2\sqrt{1+t^2}}}$$

Dado que  $u(0) = 1 > 0$  conclui-se que  $c = 3$  e assim a solução do (PVI) é

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+t^2}}}$$

### 3. Considere a equação diferencial separável

$$x' = x \operatorname{sen} t + x^2 \operatorname{sen} t$$

Determine a solução desta equação que satisfaz a condição inicial  $x(\frac{\pi}{2}) = -2$ , e determine o seu intervalo máximo de existência.

**Resolução:**

A equação pode ser escrita na forma

$$x' = (x + x^2) \operatorname{sen} t$$

Para  $x \neq 0$  e  $x \neq -1$  (podemos excluir estes dois casos visto que  $x(t) \equiv 0$  e  $x(t) \equiv -1$  são soluções constantes da equação que não verificam a condição inicial), tem-se

$$\frac{x'}{x + x^2} = \operatorname{sen} t \Leftrightarrow \int \left( \frac{1}{x^2 + x} \right) dx = \int \operatorname{sen} t dt + c$$

Fazendo a separação em frações simples da função  $\frac{1}{x^2+x}$ , obtém-se

$$\int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int \operatorname{sen} t dt + c \Leftrightarrow \log \left| \frac{x}{x+1} \right| = -\cos t + c \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = k e^{-\cos t}$$

Visto  $x(\frac{\pi}{2}) = -2$ , temos que  $k = 2$  e a solução do (PVI) é

$$x(t) = \frac{2e^{-\cos t}}{1 - 2e^{-\cos t}} = \frac{2}{e^{\cos t} - 2}$$

O domínio de diferenciabilidade da função  $x(t)$  é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : e^{\cos t} - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\pm \arccos(\log 2) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Teremos então que o intervalo máximo de existência de solução será o maior **intervalo**  $I \subset D$ , tal que  $\pi/2 \in I$ . Conclui-se

$$I = ] \arccos(\log 2), -\arccos(\log 2) + 2\pi [$$

4. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

em que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $a, b$  e  $c$  constantes reais com  $b \neq 0$ .

- Mostre que a substituição  $v = at + by + c$ , transforma a equação numa equação separável.
- Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2, \quad y(0) = 1$$

indicando o intervalo máximo de solução.

**Resolução:**

(a) Se  $v = at + by + c$  e  $b \neq 0$ , então

$$y = \frac{v - at - c}{b}$$

pelo que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{b} \left( \frac{dv}{dt} - a \right)$$

Substituindo na equação

$$\frac{dv}{dt} - a = bf(v) \Leftrightarrow \frac{\dot{v}}{bf(v) + a} = 1$$

que é obviamente uma equação separável.

(b) Por (a), sendo  $f(v) = e^v - 2$ , com  $v = 2t + y - 1$ , obtém-se

$$\frac{\dot{v}}{e^v} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \int e^{-v} dv \right) = 1 \Leftrightarrow -e^{-v} = t + k \Leftrightarrow v(t) = -\log(-t - k)$$

Desfazendo a mudança de variável

$$2t + y - 1 = -\log(-t - k) \Leftrightarrow y(t) = 1 - 2t - \log(-t - k)$$

Dado que  $y(0) = 1$ , obtem-se  $k = -1$  e como tal a solução do PVI é

$$y(t) = 1 - 2t - \log(1 - t)$$

O domínio de diferenciabilidade da função  $y(t)$  é

$$D = \{t \in \mathbb{R} : 1 - t > 0\} = ]-\infty, 1[$$

o intervalo máximo de solução será o maior **intervalo**  $I \subset D$ , tal que  $0 \in I$ . Conclui-se que

$$I = ]-\infty, 1[$$

5. Mostre que as seguintes equações são exactas e resolva-as:

$$(a) (xe^y + y - x^2) \frac{dy}{dx} = 2xy - e^y - x \quad (b) 2y^3 + 2 + 6xy^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

**Resolução:**

(a) Note-se em primeiro lugar que a equação não é linear nem separável. Resta-nos investigar se será uma equação exacta (ou redutível a exacta). A equação pode ser escrita na forma

$$-2xy + e^y + x + (xe^y + y - x^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

Definindo

$$M(x, y) = -2xy + e^y + x, \quad N(x, y) = xe^y + y - x^2$$

Dado que ambas as funções são de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x + e^y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

concluimos que se trata de uma equação exacta, pelo que existe  $\Phi(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\nabla\Phi = (M, N)$  e  $\Phi(x, y) = C$  define implicitamente a solução da equação diferencial.

• **Cálculo de  $\Phi$**

Atendendo a que  $\nabla\Phi = (M, N)$  tem-se que:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -2xy + e^y + x \Leftrightarrow \Phi(x, y) = -x^2y + xe^y + \frac{x^2}{2} + c(y)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left( -x^2y + xe^y + \frac{x^2}{2} + c(y) \right) = xe^y + y - x^2 \Leftrightarrow c'(y) = y$$

tem-se assim que  $c(y) = \frac{y^2}{2} + c$  e

$$\Phi(x, y) = -x^2y + xe^y + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

- **Cálculo da solução geral da equação**

Para  $M$ ,  $N$  e  $\Phi$  definidas acima

$$\begin{aligned} M(x, y) + N(x, y)y' = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left( \Phi(x, y) \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Phi(x, y) = c_2 \\ &\Leftrightarrow x^2y + xe^y + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = k \end{aligned}$$

Ou seja as curvas de nível da função  $\Phi(x, y)$  definem implicitamente a solução geral da equação diferencial.

(c) Note-se em primeiro lugar que a equação não é linear mas é separável. Vamos resolvê-la como equação exacta mas aconselha-se o aluno a resolvê-la também como equação separável. Resta-nos investigar se será uma equação exacta (ou redutível a exacta). Definindo

$$M(x, y) = 2y^3 + 2, \quad N(x, y) = 6xy^2$$

Dado que ambas as funções são de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ , e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

concluimos que se trata de uma equação exacta, pelo que existe  $\Phi(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\nabla \Phi = (M, N)$  e  $\Phi(x, y) = C$  define implicitamente a solução da equação diferencial.

- **Cálculo de  $\Phi$**

Atendendo a que  $\nabla \Phi = (M, N)$  tem-se que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2y^3 + 2 \Leftrightarrow \Phi(x, y) = 2xy^3 + 2x + c(y)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N \Leftrightarrow 6xy^2 + c'(y) = 6xy^2 \Leftrightarrow c'(y) = 0$$

tem-se assim que  $c(y) = c$  e

$$\Phi(x, y) = 2xy^3 + 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

• **Cálculo da solução geral da equação**

Para  $M$ ,  $N$  e  $\Phi$  definidas acima

$$\begin{aligned}M(x, y) + N(x, y)y' = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}y' = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(\Phi(x, y)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Phi(x, y) = c \\ &\Leftrightarrow 2xy^3 + 2x = k\end{aligned}$$

Ou seja as curvas de nível da função  $\Phi(x, y)$  definem implicitamente a solução geral da equação diferencial. Dado que neste caso se consegue resolver a equação em ordem a  $y$ , obtemos a forma explícita da solução da equação diferencial

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{k - 2x}{2x}}, \quad k \in \mathbb{R}$$

6. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2 + 2x}$$

- Mostre que esta equação tem um factor integrante  $\mu = \mu(y)$ .
- Determine a solução que satisfaz a condição inicial  $y(1) = 1$ .
- Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

**Resolução:**

(a) A equação pode ser escrita na forma

$$y + (4y^2 + 2x)\frac{dy}{dx} = 0$$

Fazendo

$$M(x, y) = y, \quad N(x, y) = 4y^2 + 2x$$

é óbvio que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2$$

pelo que teremos que investigar a existência de um factor integrante. Vamos averiguar se existirá  $\mu(y)$  (como sugerido), tal que a equação

$$\mu(y)y + \mu(y)(4y^2 + 2x) \frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, isto é verifica

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(y)y) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(y)(4y^2 + 2x))$$

Efectuando as derivadas

$$\mu'(y)y + \mu(y) = 2\mu(y)$$

e para  $y \neq 0$  obtemos

$$\mu'(y) = \frac{1}{y}\mu(y)$$

pelo que

$$\mu(y) = y$$

é um factor integrante da equação.

**(b)** Pela alínea (a) a equação

$$y^2 + (4y^3 + 2xy)y' = 0$$

é exacta, pelo que existe  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  verificando

$$\nabla\Phi(x, y) = (y^2, 4y^3 + 2xy)$$

e  $\Phi(x, y) = C$  define implicitamente a solução da equação diferencial. Para calcular  $\Phi$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = y^2 \Leftrightarrow \Phi(x, y) = xy^2 + c(y)$$

e

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 4y^3 + 2xy \Leftrightarrow 2xy + c'(y) = 4y^3 + 2xy \Leftrightarrow c(y) = y^4 + c$$

e finalmente

$$\Phi(x, y) = xy^2 + y^4 = C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial. Dado que  $y(1) = 1$ , tem-se que  $C = 2$ . Por outro lado  $N(1, 1) = 6 \neq 0$ , o Teorema da Função Implícita garante a existência de solução única do PVI, definida por

$$xy^2 + y^4 - 2 = 0 \tag{1}$$

para  $x$  numa vizinhança de  $x_0 = 1$ .

**(c)** Para calcular o intervalo máximo de solução, note-se que, resolvendo a equação (1) em ordem a  $y$

$$y(x) = \sqrt{\frac{-x + \sqrt{x^2 + 8}}{2}}$$

(onde as escolhas dos ramos das raízes foi baseado no facto de os dados iniciais  $x_0 = 1 > 0$  e  $y_0 = 1 > 0$ ). Dado que  $x^2 + 8 > 0$  e

$$-x + \sqrt{x^2 + 8} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

tem-se que o intervalo máximo de solução é  $\mathbb{R}$ .

7. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^2 \left( \frac{1}{x} + \log x \right) + 2y \log x \frac{dy}{dx} = 0 \\ y(e) = -1 \end{cases}$$

Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

**Resolução:**

Trata-se de uma equação da forma

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0,$$

com  $M(x, y) = y^2 \left( \frac{1}{x} + \log x \right)$  e  $N(x, y) = 2y \log x$ . Estas funções estão definidas e são de classe  $C^1$  no semi-plano

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

Temos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2y}{x} + 2y \log x \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2y}{x},$$

pelo que a equação não é exacta. Multiplicando a equação por um factor integrante  $\mu = \mu(x, y)$ , obtém-se:

$$\mu(x, y)M(x, y) + \mu(x, y)N(x, y)y' = 0.$$

Para que esta equação seja exacta,  $\mu$  deverá verificar

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N),$$

o que é equivalente a

$$y^2 \left( \frac{1}{x} + \log x \right) \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \left( \frac{2y}{x} + 2y \log x \right) = 2y \log x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \frac{2y}{x},$$

ou, ainda:

$$y^2 \left( \frac{1}{x} + \log x \right) \frac{\partial \mu}{\partial y} - 2y \log x \frac{\partial \mu}{\partial x} = -2y \log x \mu \quad (2)$$

Parece pois provável a existência de um factor integrante dependente apenas de  $x$ . De facto, admitindo que  $\mu = \mu(x)$ , então  $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'(x)$ , pelo que a equação (2) reduz-se a:

$$\mu' = \mu.$$

Podemos então tomar  $\mu(x) = e^x$ . Desta forma, a equação:

$$e^x \left( \frac{1}{x} + \log x \right) y^2 + 2ye^x \log x \frac{dy}{dx} = 0$$



é exacta, e portanto existe  $F(x, y)$  tal que esta mesma equação se pode escrever:

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = 0.$$

$F$  é então o potencial do campo gradiente  $(e^x (\frac{1}{x} + \log x) y^2, 2ye^x \log x)$ . Assim sendo:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2ye^x \log x.$$

Integrando (em ordem a  $y$ ), obtém-se:

$$F(x, y) = y^2 e^x \log x + h(x). \quad (3)$$

Por outro lado, como

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 e^x \left( \frac{1}{x} + \log x \right) + h'(x) = e^x \left( \frac{1}{x} + \log x \right) y^2,$$

temos  $h'(x) = 0$ , pelo que se pode tomar  $h(x) = 0$  em (3). A solução geral da equação diferencial é então dada implicitamente por:

$$y^2 e^x \log x = C, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

Da condição inicial  $y(e) = -1$ , resulta que  $C = e^e$ .

Como  $\log x \neq 0$  para  $x$  numa vizinhança de  $e$ , podemos dividir por  $e^x \log x$  e obter (escolhendo o sinal de acordo com a condição inicial):

$$y(x) = -\sqrt{\frac{e^e}{e^x \log x}} = -\sqrt{\frac{e^{e-x}}{\log x}}. \quad (4)$$

Esta expressão define uma função continuamente diferenciável em  $]1, +\infty[$  e satisfaz a forma implícita da solução nesse intervalo. De acordo com (4), temos que a solução explode quando  $x \rightarrow 1$ , pelo que  $]1, +\infty[$  é mesmo o intervalo máximo de solução.

## 8. Considere a equação diferencial ordinária

$$(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) + (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (5)$$

- Mostre que (5) tem um factor integrante do tipo  $\mu = \mu(xy)$ .
- Mostre que a solução de (5) com condição inicial  $y(-1) = 1$  é dada implicitamente pela expressão  $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$ .
- Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto  $-1$ , da solução dada implicitamente na alínea anterior.

## Resolução:

(a) Admitindo que a equação (5) admite um factor integrante do tipo  $\mu = \mu(xy)$ , tem-se que

$$\mu(xy) (4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) + \mu(xy) (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

é uma equação exacta, pelo que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu(xy) (4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu(xy) (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) \right)$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial y} \mu(xy) = \mu'(xy) \frac{\partial}{\partial y} (xy) = x\mu'(xy)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} \mu(xy) = \mu'(xy) \frac{\partial}{\partial x} (xy) = y\mu'(xy)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \mu'(xy)x (4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) + \mu(xy)(4x^2 + 6xy + 6y^2) &= \\ \mu'(xy)y (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) + \mu(xy)(6x^2 + 6xy + 4y^2) & \end{aligned}$$

Fazendo  $v = xy$ , obtém-se então

$$\mu'(v) = \frac{1}{v} \mu(v) \Leftrightarrow \mu(v) = v \Leftrightarrow \mu(xy) = xy$$

Por construção a equação

$$xy (4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) + xy (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, pelo que existe  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\nabla \Phi(x, y) = (4x^3y^2 + 3x^2y^3 + 2xy^4, 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3)$$

e  $\Phi(x, y) = C$  define implicitamente a solução da equação. Para calcular  $\Phi$ ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4x^3y^2 + 3x^2y^3 + 2xy^4 \Rightarrow \Phi(x, y) = x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + c(y)$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3 \Rightarrow 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3 + c'(y) = 2x^4y + 3x^3y^2 + 4x^2y^3$$

o que implica  $c(y) = c$ . Tem-se então

$$\Phi(x, y) = x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = C$$

define implicitamente a solução da equação diferencial. Finalmente, visto  $y(-1) = 1$  e  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(-1, 1) = 3 \neq 0$ , o Teorema da Função Implícita garante a existência de solução única de (5) definida por

$$x^4 y^2 + x^3 y^3 + x^2 y^4 - 1 = 0$$

para  $x$  numa vizinhança de  $x_0 = -1$  como se queria mostrar.

(c) O polinómio de Taylor de segunda ordem pedido, será

$$P_2(x) = y(-1) + y'(-1)(x + 1) + y''(-1) \frac{(x + 1)^2}{2}$$

É dado que  $y(-1) = 1$ , e atendendo a que

$$y'(x) = -\frac{4x^2 y + 3xy^2 + 2y^3}{2x^3 + 3x^2 y + 4xy^2}$$

para todo  $(x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$  que não anule  $2x^3 + 3x^2 y + 4xy^2$ , tem-se em particular que

$$y'(-1) = -\frac{4x^2 y + 3xy^2 + 2y^3}{2x^3 + 3x^2 y + 4xy^2} \Big|_{(x,y)=(-1,1)} = 1$$

Finalmente, derivando (6) em ordem a  $x$

$$y''(x) = -\frac{(8xy + 4x^2 y' + 3y^2 + 6xyy' + 6y^2 y')(2x^3 + 3x^2 y + 4xy^2)}{(2x^3 + 3x^2 y + 4xy^2)^2} + \frac{(4x^2 y + 3xy^2 + 2y^3)(6x^2 + 6xy + 3x^2 y' + 4y^2 + 8xyy')}{(2x^3 + 3x^2 y + 4xy^2)^2}$$

Sabendo que se  $x = -1$ ,  $y = 1$  e  $y' = 1$ , tem-se então

$$y''(-1) = -\frac{2}{3}$$

e

$$P_2(x) = 1 + (x + 1) - \frac{(x + 1)^2}{3}$$